DM 31

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le mercredi 12 avril à 8h.

Problème 1

Partie I

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, lorsque f est i fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $f^{(i)}$ la dérivée i-ème de f.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, lorsque $f^{(i)}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$, on note $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$.

1°) Pour cette seule question, on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer M_i.

2°) On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
On suppose également que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$.
En déduire que f' est bornée et que $M_1 \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

3°) Lorsque f est de classe C^2 et que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$,
montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

4°) Montrer de même que, si f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ et que f et $f^{(3)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, alors $M_1 \leq \dfrac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}$.
f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Partie II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^n, telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

5°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, lorsque x tend vers 0,
$$(e^x - 1)^m = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j \right) \frac{x^j}{j!} + o(x^m).$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j=\begin{cases}0 \text{ si } j\in\{1,\dots,m-1\}\\ m! \text{ lorsque } j=m\end{cases}$.

6°) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right|\leq\frac{M_nh^n}{n!}+2M_0$.

À l'aide de la question 5, montrer que $f^{(n-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, M_k est bien défini.

7°) Lorsque f n'est pas constante, montrer que, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $M_k>0$.

8°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $(s_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer que, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $(s_1s_2\dots s_k)^n\leq(s_1s_2\dots s_n)^k$.

9°) En déduire que, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $M_k\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}}$.
Indication : on pourra poser $s_k=2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$,

Problème 2

Dans tout ce problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels.
Lorsque $(s_0,s_1)\in\mathbb{R}^2$, on définit la suite réelle $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont s_0 et s_1 et dont les autres termes sont donnés par la relation de récurrence suivante : pour tout $n\geq 1$, $s_{n+1}=s_n+a_{n-1}s_{n-1}$.

Partie I

1°) On suppose pour cette question que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\geq 0$. On suppose de plus que $s_0\geq 0$ et $s_1>0$.
a) Préciser le sens de variation de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.
b) Pour tout $n\geq 2$, montrer que $s_{n+1}\leq s_ne^{a_{n-1}}$.
c) Montrer que la suite (s_n) et la série $\sum a_n$ ont la même nature.

2°) On suppose pour cette question que la série $\sum a_n$ est absolument convergente et on considère la suite (v_n) définie par
$v_0=|s_0|$, $v_1=|s_1|$ et, pour $n\geq 1$, $v_{n+1}=v_n+|a_{n-1}|v_{n-1}$.
Comparer $|s_n|$ et v_n.
Montrer que la série $\sum|s_{n+1}-s_n|$ converge puis que la suite (s_n) est convergente.

3°) On suppose dans cette question que $a_n=a^n$, où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$, et que la limite L de la suite (s_n) est non nulle.
En fonction de L et de a, déterminer un équivalent de $s_{k+1}-s_k$ puis un équivalent de $L-s_n$.

4°) On suppose dans cette question que $a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et que la limite L de la suite (s_n) est non nulle.

a) Montrer que $L - s_n \sim \dfrac{L}{n}$.

b) Déterminer un équivalent de $s_n - L + \dfrac{L}{n}$ en fonction de L.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que a_n est strictement positif pour tout entier naturel n et que la série $\sum a_n$ est convergente. On note $L(s_0, s_1)$ la limite de la suite (s_n).

5°) Montrer que L est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $(s_0, s_1) \neq (0, 0)$.

6°) Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $s_m = 0$, alors $L(s_0, s_1) \neq 0$.

7°) Montrer que $\mathrm{Ker}(L) \neq \mathbb{R}^2$ et que $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(L)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (on ne demande pas de le démontrer).
On dira que la suite (s_n) est alternée si $s_n s_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8°) Montrer que le couple de réels (s_0, s_1) est dans $\mathrm{Ker}(L)$ si et seulement si la suite (s_n) est alternée.

9°) Lorsqu'on impose la condition $(s_0, s_1) \in \mathrm{Ker}(L)$, montrer que le rapport
$r_0 = -\dfrac{s_1}{s_0}$ ne dépend pas de (s_0, s_1).

10°) On suppose dans cette question que le couple (s_0, s_1) appartient à $\mathrm{Ker}(L)$ et on pose $r_n = -\dfrac{s_{n+1}}{s_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = -1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ et $0 < r_n < a_n$.
Déterminer la nature des séries $\sum r_n$, $\sum s_n$ et $\sum |s_n|$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction
$f_n : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ définie par $f_n(x) = \dfrac{a_n}{1+x}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n$ et $p_n = g_n(0)$.

11°) Etablir que f_n et g_n sont monotones et dérivables.
Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|g_n'(x)| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $|p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

12°) Montrer que $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} r_0$.