DM 29 : énoncé
Restes de Cauchy des séries de Riemann

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le dimanche 2 avril à 8h.

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste : $R_n(\alpha)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$.

Partie I : Formule de Taylor

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments et f désigne une application de classe C^{∞} de I dans $\mathbb{C}$.

1°) Soit $a,b\in I$ avec $a<b$ et $n\in\mathbb{N}$.
Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n :

$$f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

2°) Soit $n\in\mathbb{N}$. En posant $f(t)=e^{-t}$, déduire de la question précédente que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^x t^n e^{-t}\ dt=n!\Big(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\Big)$.
En déduire que $\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}dt=n!$.

3°) Soit $k\in\mathbb{N}$. On suppose que $[k,k+1]\subset I$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(k+1)=\sum_{h=0}^{n}\frac{1}{h!}f^{(h)}(k)+\frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(t+k)(1-t)^n\ dt$.

Partie II : Convergence des séries de Riemann

4°) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a,+\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1,+\infty[$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$

5°) En déduire la nature de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $\displaystyle S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

6°) Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie III : Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, on fixe un réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $\displaystyle R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

7°) En utilisant l'encadrement de la question 4,
montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

8°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$
où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

9°) En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, $R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

Partie IV : Nombres de Bernoulli

On fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments.
On souhaite construire par récurrence sur p une suite de réels $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et une famille de réels $(b_{\ell,p})_{\substack{p\geq 2\\ 1\leq \ell\leq p-1}}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on dispose de la propriété $R(p)$ suivante : pour toute fonction f de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞, la fonction g définie par

$g = a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie : $g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \ldots + \frac{1}{p!} g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$,
de sorte que la quantité $g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \ldots + \frac{1}{p!} g^{(p)}$ ne dépend pas de f'', $f^{(3)}, \ldots, f^{(p)}$.

10°) Déterminer des réels a_0, a_1 et $b_{1,2}$ pour lesquels $R(1)$ et $R(2)$ sont vraies.

11°) Soit $p \geq 2$. On suppose construits $(a_0, \ldots, a_{p-1})$ et $(b_{\ell,k})_{\substack{2 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq k-1}}$ pour lesquels $R(1)$,. . ., $R(p)$ sont vraies. Déterminer a_p et $(b_{\ell,p+1})_{1 \leq \ell \leq p}$ pour lesquels $R(p+1)$ est vraie.

12°) En utilisant $f(t) = e^{xt}$, où x est un réel quelconque,
montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$, $a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

13°) Calculer a_2, a_3 et a_4.

14°) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|a_p| \leqslant 1$.

15°) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, montrer que la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on note $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

16°) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
Montrer qu'on peut écrire $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p \right) = z + r_N$, où $r_N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

17°) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

18°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\varphi(t)$ admet au voisinage de 0 le développement limité à l'ordre n suivant : $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)$.

19°) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

Partie V : Seconde étude asymptotique du reste

Soit f la fonction défnie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.
Dans cette partie, on fixe un entier naturel p tel que $p \geq 2$ et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$.

20°) En utilisant la question 3, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant Ak^{-(2p+\alpha)}$.

21°) En déduire que $R_n(\alpha)$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \ldots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\big) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

22°) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.