DM 29 : un corrigé

Ce problème s'inspire très largement de la première moitié du sujet de Centrale MP 2011.

Partie I : Formule de Taylor

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ la propriété suivante :
$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$

Pour $n = 0$, f étant de classe C^1 sur $[a, b]$, d'après le cours, $f(a) = f(b) + \int_a^b f'(t)\ dt$, ce qui prouve $R(0)$.

Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt &= \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt,\end{aligned}$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence,
$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt$, ce qui prouve $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\diamond$ Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à $f(t) = e^{-t}$ entre $a = x$ et $b = 0$. On obtient que $f(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(0-x)^k + \int_x^0 \frac{(0-t)^n}{n!}(-1)^{n+1}e^{-t}\ dt$, donc $1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x} + \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\ dt$. On en déduit que $\int_0^x t^n e^{-t}\ dt = n!\Big(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\Big)$.

$\diamond$ En conservant l'entier n fixé, on fait maintenant tendre x vers $+\infty$. D'après le théorème des croissances comparées, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x^k e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\int_0^x t^n e^{-t} dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} n!$.

Cela signifie que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est définie et que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

3°) On applique la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $k+1$:
$f(k+1) = f(k) + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} f^{(h)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$
En effectuant le changement de variable $t = x + k$, on obtient que
$f(k+1) = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} f^{(h)}(k) + \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(x+k)(1-x)^n\ dx.$

Partie II : Convergence des séries de Riemann

4°) Pour tout $x \in [k-1, k] \subset [a, +\infty[$, $f(x+1) \leq f(k) \leq f(x)$ par décroissance de f donc $\int_{k-1}^{k} f(x+1)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$, soit, en effectuant le changement de variable $t = x+1$ dans la première intégrale, $\underline{\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x}$.

5°) Si $\alpha > 1$, on a donc, en appliquant ce qui précède à $f : \ t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui est bien continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles est majorée : elle est donc convergente.
Si $\alpha \leq 1$, on a donc, en appliquant la question 4 à $f : \ t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.
Ainsi $\underline{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$.

6°) La majoration a été vue lors de la question précédente et la minoration est immédiate car $\frac{1}{1^\alpha} = 1$, donc $\underline{\forall \alpha > 1,\ 1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}}$.

Partie III : Première étude asymptotique du reste

7°) Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$ avec $2 \leq n \leq N$. D'après la question 4,
$\displaystyle\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, or $\displaystyle\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_n^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient que
$\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$, puis
$\displaystyle 0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big)$. Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{\alpha-1}} - 1\Big)\\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1+(\alpha-1)\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1) \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\frac{1}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$, ce qui démontre que
$\displaystyle 0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$, donc que $\underline{R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)}$.

8°) D'après la question 3, avec $n = 2$,

$$f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{1}{2}f''(k) + \frac{1}{2}\int_0^1 f^{(3)}(k+x)(1-x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) = \dfrac{1}{t^\alpha},\ f''(t) = -\dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}},\ f^{(3)}(t) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$. On a donc

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(k+t)^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

avec $\displaystyle 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_0^1 \frac{1}{k^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$.
On a donc $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \text{ avec } 0 \leq A_k \leq \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+2}}}$.

9°) On peut écrire l'égalité ci-dessus sous la forme
$\displaystyle\frac{1}{k^\alpha} = f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} - A_k$ avec $A_k = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$.
La série $\displaystyle\sum_{k\geq1}(f(k+1)-f(k))$ est une série télescopique qui converge puisque $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et les séries $\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^{\alpha+2}}$ sont des séries de Riemann convergentes. On a donc, par linéarité de la somme, $\displaystyle R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) - \sum_{k=n}^{+\infty} A_k$. Or, par sommation

de relation de comparaison pour des séries convergentes, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} A_k = O(R_n(\alpha+2))$.
D'autre part d'après la question 7 appliquée à $\alpha+1$ et $\alpha+2$,
$R_n(\alpha+1) = \dfrac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $R_n(\alpha+2) = \dfrac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+2}}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.
Finalement, $\underline{R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}$.

Partie IV : Nombres de Bernoulli

10°) Soit f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$.

◇ Pour $p=1$, posons $g=f$. Alors $g'=f'$, donc $g' = f' + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$, car la dernière somme est vide. Ceci démontre qu'en choisissant $\boxed{a_0 = 1}$, la propriété $R(1)$ est vérifiée.
◇ Pour $p=2$, soit a_1 un réel pour le moment quelconque. Posons $g = f + a_1 f'$. Alors $g' + \frac{1}{2}g'' = f' + a_1 f'' + \frac{1}{2}(f'' + a_1 f^{(3)})$. Ainsi, en posant $\boxed{a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } b_{1,2} = -\frac{1}{4}}$, $g' + \frac{1}{2}g'' = f' + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$, de sorte que la propriété $R(2)$ est vérifiée : en effet, a_1 et $b_{1,2}$ ne dépendent pas de f.

11°) Soit f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$.

Prenons a_p pour le moment quelconque et notons $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k)}$.

Posons $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}$, de sorte que $g = h + a_p f^{(p)}$.

D'après $R(p)$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} h^{(j)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)}$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} g^{(j)} &= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} h^{(j)} + \frac{1}{(p+1)!} h^{(p+1)} + a_p \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k+p+1)} + a_p f^{(p+1)} + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_p}{j!} f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{\ell=2}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{p-1} a_k f^{(k+p+1)} + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_p}{j!} f^{(p+j)} \\
&\quad + b_{1,p} f^{(p+1)} + \frac{a_0}{(p+1)!} f^{(p+1)} + a_p f^{(p+1)}.
\end{aligned}$$

Posons $\boxed{a_p = -b_{1,p} - \dfrac{a_0}{(p+1)!}}$. Alors,

$\displaystyle\sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} g^{(j)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-2} b_{l+1,p} f^{(p+1+\ell)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\ell=1}^{p-1} a_\ell f^{(p+1+\ell)} + \sum_{\ell=1}^{p} \frac{a_p}{(\ell+1)!} f^{(p+1+\ell)}$, ce qui est bien de la forme $f' + \displaystyle\sum_{l=1}^{p} b_{l,p+1} f^{(l+p+1)}$ si l'on convient que pour tout $\ell \in \{1, \dots, p-2\}$, $\boxed{b_{\ell,p+1} = b_{\ell+1,p} + \frac{a_\ell}{(p+1)!} + \frac{a_p}{(\ell+1)!}}$, que $\boxed{b_{p-1,p+1} = \frac{a_{p-1}}{(p+1)!} + \frac{a_p}{p!} \text{ et } b_{p,p+1} = \frac{a_p}{(p+1)!}}$.

Par hypothèse, $(a_0, \dots, a_{p-1})$ et $(b_{\ell,k})_{\substack{2 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq k-1}}$ ne dépendent pas de f, donc c'est encore le cas pour a_p et $(b_{\ell,p+1})_{1 \leq \ell \leq p}$, ce qui prouve $R(p+1)$.

12°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons $R(p)$ lorsque $I = \mathbb{R}$ et que f est l'application $t \longmapsto e^{xt}$, qui est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

on a alors $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k \mathrm{e}^{xt}$ donc, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) &= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{k+j} \right) = \sum_{i=1}^{2p-1} \left(\sum_{\substack{j+k=i \\ 1 \leq j \leq p,\ 0 \leq k \leq p-1}} \frac{a_k}{j!} \right) x^i \\
&= a_0 x + \sum_{i=2}^{p} \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{a_{i-j}}{j!} \right) x^i + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{\substack{j+k=l+p \\ 1 \leq j \leq p,\ 0 \leq k \leq p-1}} \frac{a_k}{j!} \right) x^{l+p}
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) = f'(0) + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)}(0) = x + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} x^{\ell+p}.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, les polynômes concernés ont les mêmes coefficients. On en déduit que $a_0 = 1$ et $\forall i \in \{2, \dots, p\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{a_{i-j}}{j!} = 0$, donc $a_{i-1} = -\displaystyle\sum_{j=2}^{i} \frac{a_{i-j}}{j!}$. On peut utiliser cette formule en remplaçant p par $p+1$ et i par $p+1$. On obtient que $\forall p \geq 2,\quad a_p = -\displaystyle\sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!}$.

13°) On utilise la relation précédente :

◇ $a_2 = -\left(\frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} \right) = -\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{12} - \frac{2}{12}$, donc $\boxed{a_2 = \frac{1}{12}}$.

◇ $a_3 = -\left(\frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_0}{4!} \right) = -\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right)$, donc $\boxed{a_3 = 0}$.

$\diamond$ $a_4 = -\Big(\dfrac{a_3}{2!}+\dfrac{a_2}{3!}+\dfrac{a_1}{4!}+\dfrac{a_0}{5!}\Big) = -\Big(\dfrac{1}{12\times 6}-\dfrac{1}{2\times 24}+\dfrac{1}{120}\Big)$, donc $a_4 = \dfrac{-10+15-6}{12\times 2\times 3\times 2\times 5}$.
Ainsi, $\boxed{a_4 = -\dfrac{1}{720}}$.

14°) Montrons que $|a_p| \leq 1$ par récurrence sur p.
La propriété est vraie pour $p=0$ et $p=1$ car $a_0 = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{2}$.
Soit $p \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in \{0,\dots,p-1\}$, $|a_k| \leq 1$. Alors d'après la question précédente, $|a_p| = \left|\displaystyle\sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!}\right| \leq \displaystyle\sum_{j=2}^{p+1} \frac{|a_{p+1-j}|}{j!}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $|a_p| \leq \displaystyle\sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{j!} \leq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e} - 2 < 1$.
D'après le principe de récurrence, $\underline{\forall p \in \mathbb{N},\quad |a_p| \leq 1}$.

15°) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. D'après la question précédente,
$\forall p \in \mathbb{N}$, $|a_p z^p| \leq |z|^p$, or $\sum |z|^p$ est une série géométrique convergente car $|z| < 1$, donc $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est absolument convergente.

16°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par distributivité,
$\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p\Big) = \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 0\leq p\leq N}} \frac{a_p}{n!} z^{n+p}$, puis par sommation par paquets,

$\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p\Big) = \sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{n+p=k\\ n\geq 1}} \frac{a_p}{n!}\Big) z^k + z^{N+1} B_N(z)$, où $B_N(z) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 0\leq p\leq N\\ n+p\geq N+1}} \frac{a_p}{n!} z^{n+p-N-1}$.

Si $k \geq 2$, $\displaystyle\sum_{\substack{n+p=k\\ n\geq 1}} \frac{a_p}{n!} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{k-n}}{n!} = 0$ d'après la question 12,

et si $k=1$, $\displaystyle\sum_{\substack{n+p=k\\ n\geq 1}} \frac{a_p}{n!} = a_0 = 1$, donc $\Big(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p\Big) = z + z^{N+1} B_N(z)$. Il reste donc à montrer que $z^{N+1} B_N(z) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $n+p \geq N+1$, $\left|\dfrac{a_p}{n!} z^{n+p-N-1}\right| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire, $|B_N(z)|$ est inférieur au cardinal
de $\{(n,p) \in \{1,\dots,N\} \times \{0,\dots,N\} / n+p \geq N+1\}$, donc est inférieur à $N(N+1)$.
Ainsi, $0 \leq |z^{N+1} B_N(z)| \leq |z|^{N+1} N(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des croissances comparées, car $|z| < 1$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

17°) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$. On fait tendre N vers $+\infty$ dans la question précédente. Les séries concernées étant convergentes,

on obtient que $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_pz^p\right)=z$, donc $(e^z-1)\varphi(z)=z$.
Supposons que $e^z=1$, alors en passant aux modules, $e^{\mathrm{Re}(z)}=1$, donc $\mathrm{Re}(z)=0$. Ainsi, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=i\theta$. Alors $e^{i\theta}=1$, donc $\theta\equiv 0[2\pi]$, donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $z=2ik\pi$, or $z\neq 0$, donc $|k|\geq 1$ puis $|z|\geq 2\pi>1$, ce qui est faux. Ainsi, $e^z\neq 1$, ce qui permet d'écrire que $\varphi(z)=\dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1}$.

18°) Soit $n\in\mathbb{N}$. On peut écrire $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k+t^ng(t)$, où $g(t)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kt^{k-n}$.
Il s'agit donc de montrer que $g(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$.
D'après la question 14, on a par inégalité triangulaire :
$0\leq |g(t)|\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}|t|^{k-n}=\dfrac{|t|}{1-|t|}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

19°) Soit $t\in]-1,1[$. Posons $\psi(t)=\varphi(t)+\frac{t}{2}$. ψ est paire sur $]-1,1[$. En effet, d'après la question 17, $\psi(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{t}{e^t-1}=\dfrac{2t+t(e^t-1)}{2(e^t-1)}=\dfrac{t}{2}\dfrac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1}=\dfrac{t}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{t/2}+\mathrm{e}^{-t/2}}{\mathrm{e}^{t/2}-\mathrm{e}^{-t/2}}=\psi(-t)$, or $\psi(t)=\varphi(t)-a_1t$, donc d'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, on a $\psi(t)=1+\sum_{k=2}^{n}a_kt^k+o(t^n)$ et $\psi(t)=\psi(-t)=1+\sum_{k=2}^{n}a_k(-1)kt^k+o(t^n)$, donc d'après l'unicité du développement limité, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $a_{2k+1}=-a_{2k+1}$, donc $a_{2k+1}=0$.

Partie V : Seconde étude asymptotique du reste

20°) Si $f(x)=\dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ alors f donc g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut ainsi appliquer la question 3 à g avec $n=2p$:

$$\begin{aligned} g(k+1) &= g(k)+\sum_{j=1}^{2p}\frac{1}{j!}g^{(j)}(k)+\frac{1}{(2p)!}\int_0^1 g^{(2p+1)}(k+t)\,(1-t)^{2p}\,\mathrm{d}t\\ &= g(k)+f'(k)+\sum_{\ell=1}^{2p-1}b_{\ell,2p}f^{(\ell+2p)}(k)\\ &\quad+\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\left(\sum_{i=0}^{2p-1}a_if^{(i+2p+1)}(k+t)\right)(1-t)^{2p}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On établit par récurrence sur n que, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$, donc

$$\begin{aligned}
|R(k)| &= \Bigg| \sum_{n=2p+1}^{4p-1} b_{n-2p,2p}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} \\
&\quad + \int_0^1 \left[\sum_{n=2p+1}^{4p} a_{n-2p-1}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(2p)!(k+t)^{\alpha+n-1}}\right](1-t)^{2p}\mathrm{d}t\Bigg| \\
&\leq \sum_{n=2p+1}^{4p-1} |b_{n-2p,2p}|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} \\
&\quad + \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \left(\sum_{n=2p+1}^{4p} |a_{n-2p-1}|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(k+t)^{\alpha+n-1}}\right)(1-t)^{2p}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left[\sum_{n=2p+1}^{4p}\left(|b_{n-2p,2p}|+\frac{|a_{n-2p-1}|}{(2p)!}\right)\alpha\cdots(\alpha+n-2)\right] k^{-(2p+\alpha)},
\end{aligned}$$

en convenant que $b_{2p,2p}=0$.
Notons A la quantité située entre crochets. Elle est indépendante de k, donc, p et α étant fixés, $\underline{\exists\, A\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\quad |R(k)|\leq A\,k^{-(2p+\alpha)}}$.

21°) D'après la question précédente, $R(k)=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$ et $2p+\alpha>1$ donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} R(k)$ est convergente et on a, par sommation des relations de comparaison, $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} R(k)=\mathrm{O}\left(R_n(2p+\alpha)\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ d'après la question 7.
Or $R(k)=g(k+1)-g(k)-\dfrac{1}{k^\alpha}$
où $\displaystyle g(k)=\frac{a_0}{(1-\alpha)k^{\alpha-1}}+\sum_{i=1}^{2p-1} a_i(-1)^{i-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+i-2)}{k^{\alpha+i-1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\alpha>1$, donc la série télescopique $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(g(k+1)-g(k))$ converge et on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} R(k)=-g(n)-R_n(\alpha)$.
On en déduit que $\displaystyle R_n(\alpha)=-g(n)-\sum_{k=n}^{\infty} R(k)=-g(n)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. De plus, $p\geq 2$, donc d'après la question 19, $a_{2p-1}=0$. Ceci donne
$\underline{\forall p\geq 2,\ R_n(\alpha)=-\Big(a_0f(n)+a_1f'(n)+a_2f''(n)+\cdots+a_{2p-2}f^{(2p-2)}(n)\Big)+O\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)}$.

22°) Pour $p=3$, il vient
$R_n(\alpha)=-\left(\dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{2n^\alpha}-\dfrac{\alpha}{12n^{\alpha+1}}+\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720n^{\alpha+3}}\right)+O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+5}}\right)$ soit, en particulier, $\underline{R_n(3)=\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}+\dfrac{1}{4n^4}-\dfrac{1}{12n^6}+O\left(\dfrac{1}{n^8}\right)}$.