DS 8

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Tétration

On considère la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par

$$f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, f_{p+1}(x) = x^{f_p(x)}$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^x$, $f_3(x) = x^{x^x}$ etc.

1°) Justifier que, pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, f_p admet un développement limité au voisinage de 1 à l'ordre n.

2°) Déterminer les développements limités au voisinage de 1 à l'ordre 3 de f_2 et f_3.

3°) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $p \geqslant n$, on a $f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \cdots + a_{n,n}h^n + o(h^n)$, lorsque h tend vers 0.

4°) Démontrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \geqslant n$, on a $f_p(1+h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + o(h^n)$, lorsque h tend vers 0.

5°) Quel est le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 de f_{2023} ?

Problème 2 : une fonction nulle part dérivable

1°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

- $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ et,
- pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la restriction $f|_{[a_{i-1},a_i]}$ est dérivable.

Sur un exemple, montrer que f n'est pas nécessairement dérivable sur $[a, b]$.
Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, pour tout $x \in [a_{i-1}, a_i]$,
$\left| [f|_{[a_{i-1},a_i]}]'(x) \right| \leq k$. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$.

2°) Pour tout $x \in [-2, 2[$, on pose $g(x) = 1 - |x|$.
On prolonge g sur $\mathbb{R}$ en entier en une fonction périodique de période 4.
Représenter le graphe de g et montrer que g est continue.
Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$.

3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)}x)$.

Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Montrer que f est bornée.

4°) Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h - h_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que h est continue.

5°) Montrer que f est continue.

Jusqu'à la fin de ce problème, on fixe $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit ε_n dans $\{-1, 1\}$ de sorte qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{(2^n)}x$ et $2^{(2^n)}x + \varepsilon_n$ sont tous deux dans l'intervalle $[2N, 2N + 2]$.
On pose alors $h_n = \varepsilon_n 2^{-(2^n)}$.

6°) Montrer qu'un tel choix de la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est possible.
Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq n$: calculer $\left|g\left(2^{2^k}(x + h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right|$.

7°) Montrer que $\left|\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Qu'a-t-on démontré ?

Problème 3 : Points attractifs et dérivées schwarziennes

Partie I : Fonctions à schwarzienne négative.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, on note $f^{(\mathrm{s})} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la dérivée schwarzienne de f définie par $f^{(\mathrm{s})} = 2 \times f''' \times f' - 3 \times f''^2$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telles que,
pour tout réel x, $(f'(x) \neq 0) \Rightarrow (f^{(\mathrm{s})}(x) < 0)$.

1°) Démontrer que les fonctions polynomiales de degré 2 appartiennent à $\mathcal{E}$.

2°) Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^3$. Démontrer que
$(g \circ f)^{(\mathrm{s})} = (g' \circ f)^2 \times f^{(\mathrm{s})} + f'^4 \times (g^{(\mathrm{s})} \circ f)$.

3°) Démontrer que $\forall f, g \in \mathcal{E}$, $g \circ f \in \mathcal{E}$.

4°) Pour cette question, on suppose que $f \in \mathcal{E}$ et que $|f'|$ admet un minimum local en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

En posant $\varphi = (f')^2$, montrer en détail que $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \geq 0$.

En déduire que $f'(x_0) = 0$.

Partie II : Points fixes attractifs

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$ est un point fixe attractif de f, ce qui signifie que $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{\circ n}$ la n-ème itérée de f pour la loi de composition $\circ$.
On a donc $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $f^{\circ n} = f \circ \cdots \circ f$ (n fois) où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\mathrm{B}_f(\ell) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f^{\circ n}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\}$.
$\mathrm{B}_f(\ell)$ est le bassin d'attraction de ℓ pour f.

On note $\mathrm{I}_f(\ell)$ le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$.

5°) Dans cette question (et seulement dans cette question), on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Déterminer les points fixes attractifs de f ainsi que leurs bassins d'attraction.

6°) Montrer que $\mathrm{I}_f(\ell)$ est correctement défini et que $\ell \in \mathrm{I}_f(\ell)$.

7°) Démontrer que $f(\mathrm{B}_f(\ell)) \subset \mathrm{B}_f(\ell)$ et $f^{-1}(\mathrm{B}_f(\ell)) \subset \mathrm{B}_f(\ell)$.
Démontrer que $f(\mathrm{I}_f(\ell)) \subset \mathrm{I}_f(\ell)$.

8°) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]\ell - \alpha; \ell + \alpha[\subset \mathrm{B}_f(\ell)$.

9°) Montrer que $\mathrm{B}_f(\ell)$ et $\mathrm{I}_f(\ell)$ sont ouverts.

Partie III : Version faible du théorème de Singer

Dans toute cette partie, on suppose que $f \in \mathcal{E}$.

Sauf pour la dernière question, on suppose, comme dans la partie précédente, que ℓ est un point attractif de f.

Sauf pour la dernière question, on suppose que $\mathrm{I}_f(\ell)$ est un intervalle borné.
Il existe donc $a \in]-\infty; \ell[$ et $b \in]\ell; +\infty[$ tels que $\mathrm{I}_f(\ell) =]a; b[$.

On souhaite démontrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathrm{I}_f(\ell)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que f' ne s'annule pas sur $]a; b[$.

10°) Démontrer que $(f^{\circ 2})' > 0$ sur $]a; b[$ et vérifier que $(f^{\circ 2})'(\ell) < 1$.

11°) Démontrer que $f(a) \in \{a; b\}$ et $f(b) \in \{a; b\}$.
En déduire que $f^{\circ 2}(a) = a$ et $f^{\circ 2}(b) = b$.

12°) Montrer qu'il existe $\alpha \in]a; \ell[$ et $\beta \in]\ell; b[$ tels que $(f^{\circ 2})'(\alpha) = 1$ et $(f^{\circ 2})'(\beta) = 1$.

13°) Aboutir à une contradiction et conclure

14°) Dans cette question f désigne maintenant une fonction quelconque de $\mathcal{E}$.
On suppose que f' s'annule en exactement n points distincts (où $n \in \mathbb{N}$).
Démontrer que f possède au plus $n + 2$ points fixes attractifs.