DS 8 : Corrigé

Le barème comporte un total de 73 points.

Problème 1 : Tétration (sur 10 points)

1°) (sur $0,5$ point) Les théorèmes généraux nous disent que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, d'après le théorème de Taylor-Young, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p un développement limité au voisinage de 1 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

2°) On pose $x = 1 + h$, de sorte que h tend vers 0 lorsque x tend vers 1.

$\diamond$ (sur 2 points)

$f_2(1+h) = (1+h)^{1+h} = e^{(1+h)\ln(1+h)} = e^{(1+h)(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o\left(h^3\right))}$, donc $f_2(2+h) = e^u$,

où $u = h + \dfrac{h^2}{2} - \dfrac{h^3}{6} + o\left(h^3\right) = h\left(1 + \dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{6} + o(h^2)\right)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. On calcule $u^2 = h^2(1 + h + o(h))$ et $u^3 = h^3(1 + o(1))$,

donc $f_2(1+h) = 1+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{6}+o(u^3) = 1+h+h^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+h^3\left(-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\right)+o\left(h^3\right)$.

En conclusion, $f_2(1+h) = 1 + h + h^2 + \dfrac{h^3}{2} + o\left(h^3\right)$.

$\diamond$ (sur 2 points)

On en déduit que $f_3(1+h) = (1+h)^{f_2(1+h)} = e^{f_2(1+h)\ln(1+h)} = e^v$, où

$v = h\left(1 + h + h^2 + o\left(h^2\right)\right)\left(1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} + o\left(h^2\right)\right) = h\left(1 + \dfrac{h}{2} + \dfrac{5h^2}{6} + o\left(h^2\right)\right)$.

Ainsi, $f_3(1+h) = e^v = 1 + v + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{v^3}{6} + o(v^3)$, avec

$v = h\left(1 + \dfrac{h}{2} + \dfrac{5h^2}{6} + o\left(h^2\right)\right)$, $v^2 = h^2(1 + h + o(h))$ et $v^2 = h^3(1 + o(1))$.

En conclusion, $f_3(1+h) = 1 + h + h^2 + \dfrac{3h^3}{2} + o\left(h^3\right)$.

3°) (sur 3 points) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion $P(n)$ suivante :
Il existe $a_{n,0}, \ldots, a_{n,n} \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $p \geqslant n$,
$f_p(1+h) = a_{n,0} + a_{n,1}h + \cdots + a_{n,n}h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$.
Initialisation : Pour tout $p \geqslant 0$, on a $f_p(1) = 1$, donc $f_p(1+h) = 1 + \mathrm{o}(h)$. Cela démontre que $\mathrm{P}(0)$ est vraie avec $a_{0,0} = 1$.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathrm{P}(n+1)$. Soit $p \geqslant n$.
On a $f_{p+1}(1+h) = (1+h)^{f_p(1+h)} = e^{f_p(1+h)\ln(1+h)}$.

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathrm{P}(n)$, il existe des nombres réels $a_{n,0},\ldots,a_{n,n}$ tels que $f_p(1+h)=a_{n,0}+a_{n,1}h+\cdots+a_{n,n}h^n+\mathrm{o}\left(h^n\right)$.
Le développement de $\ln(1+h)$ à l'ordre $n+1$ nous donne

$$\begin{aligned}\ln(1+h) &= h-\frac{h^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{h^{n+1}}{n+1}+o\left(h^{n+1}\right)\\ &= h\left[1-\frac{h}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{h^n}{n+1}+o\left(h^n\right)\right].\end{aligned}$$

En développant le produit de ces deux derniers développements limités, on obtient l'existence de nombres réels $b_{n+1,1},b_{n+1,2},\ldots,b_{n+1,n+1}$ indépendants de p tels que
$f_p(1+h)\ln(1+h)=h\left[b_{n+1,1}+b_{n+1,2}h+\cdots+b_{n+1,n+1}h^n+o\left(h^n\right)\right]$.
En composant ce développement limité avec celui de l'exponentielle en 0 à l'ordre $n+1$, on obtient l'existence de nombres réels $a_{n+1,1},a_{n+1,2},\ldots,a_{n+1,n+1}$ indépendants de p tels que $e^{f_p(1+h)\ln(1+h)}=1+a_{n+1,1}h+a_{n+1,2}h^2+\cdots+a_{n+1,n+1}h^{n+1}+o\left(h^{n+1}\right)$.
En posant $a_{n+1,0}=1$, on a donc
$f_{p+1}(1+h)=a_{n+1,0}+a_{n+1,1}h+a_{n+1,2}h^2+\cdots+a_{n+1,n+1}h^{n+1}+o\left(h^{n+1}\right)$.
Comme tous les $a_{n+1,j}$, pour $j\in\{0,\ldots,n+1\}$, sont indépendants de p, cela démontre $\mathrm{P}(n+1)$. Alors d'après le principe de récurrence, $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4°) (sur 2 points) Soit $n\in\mathbb{N}$. Les assertions $\mathrm{P}(n)$ et $\mathrm{P}(n+1)$ utilisées pour $p=n+1$ nous disent respectivement que $f_{n+1}(1+h)=a_{n,0}+a_{n,1}h+\cdots+a_{n,n}h^n+o\left(h^n\right)$ et $f_{n+1}(1+h)=a_{n+1,0}+a_{n+1,1}h+\cdots+a_{n+1,n}h^n+o\left(h^n\right)$.
Alors, d'après l'unicité du développement limité, pour tout $k\leqslant n$, $a_{n+1,k}=a_{n,k}$.
Comme n est quelconque dans $\mathbb{N}$, on en déduit que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite $\left(a_{n,k}\right)_{n\geq k}$ est constante, égale à une valeur que l'on note a_k. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$ devient : $\forall p\geqslant n, f_p(1+h)=a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+o\left(h^n\right)$.

5°) (sur $0,5$ point) Pour $n=3$, la question précédente nous dit que toutes les fonctions f_p pour $p\geqslant 3$ ont le même développement limité à l'ordre 3 . Vu le résultat trouvé à la question 2, on peut donc affirmer que $f_{2023}(1+h)=1+h+h^2+\dfrac{3h^3}{2}+o\left(h^3\right)$.

Problème 2 : une fonction nulle part dérivable (sur 23 points)

1°) $\diamond$ (sur 1 point) Prenons $a=-1$, $b=1$ et, pour tout $x\in[-1,1]$, $f(x)=|x|$.
Posons $n=2$, $a_0=-1$, $a_1=0$ et $a_2=1$. Alors $f|_{[a_0,a_1]}=-\mathrm{Id}_{[-1,0]}$, donc c'est une application dérivable et $f|_{[a_1,a_2]}=\mathrm{Id}_{[0,1]}$, donc c'est aussi une application dérivable.
f étant de plus continue, f satisfait les hypothèses de l'énoncé. Pourtant, f n'est pas dérivable en 0, car les dérivées à gauche et à droite en 0 sont différentes.
$\diamond$ (sur 2 points) Pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, posons $f_i=f|_{[a_{i-1},a_i]}$.

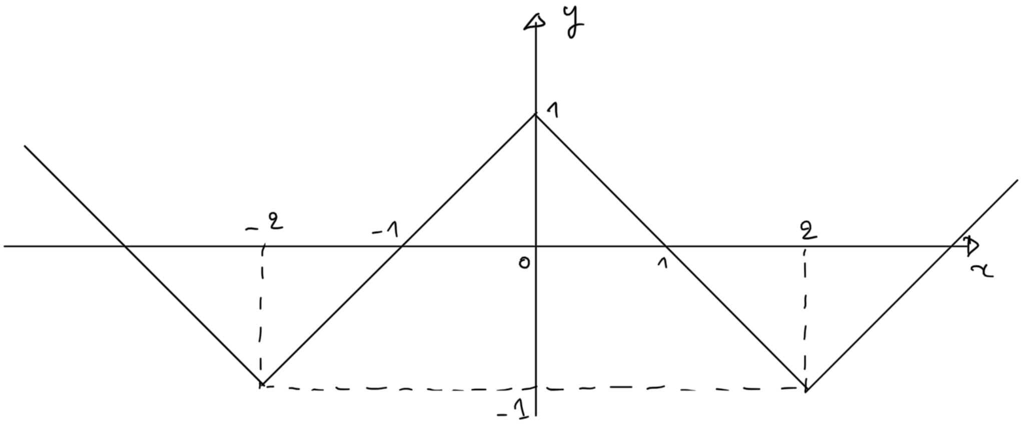
$$|f(b)-f(a)|=|f(a_n)-f(a_0)|=\left|\sum_{i=1}^{n}(f(a_i)-f(a_{i-1}))\right|,$$

car la dernière somme est télescopique, donc d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(b)-f(a)|\leq\sum_{i=1}^{n}|f(a_i)-f(a_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|f_i(a_i)-f_i(a_{i-1})|.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à f_i entre a_{i-1} et a_i, qui est bien dérivable sur $[a_{i-1}, a_i]$, $|f_i(a_i) - f_i(a_{i-1})| \leq k|a_i - a_{i-1}| = k(a_i - a_{i-1})$, donc $|f(b) - f(a)| \leq k \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = k(b-a)$, car c'est encore une somme télescopique.

2°) $\diamond$ (sur 1 point) Pour $x \in [-2, 0]$, $g(x) = x + 1$. Son graphe sur $[-2, 0]$ est le segment de droite joignant les points $(-2, -1)$ et $(0, 1)$.
Pour $x \in [0, 2]$, $g(x) = 1 - x$. Son graphe sur $[0, 2]$ est le segment de droite joignant les points $(0, 1)$ et $(2, -1)$.
Ceci permet de représenter le graphe de g :



$\diamond$ (sur 2 points) Le graphe montre que g est continue.
On va tout de même le démontrer rigoureusement.
Lorsque $x \in]-2, 2[$, $]-2, 2[$ est un voisinage de x sur lequel $g(t) = 1 - |t|$, donc g est continue en x. Par 4-périodicité, g est continue en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus (2 + 4\mathbb{Z})$.
Lorsque $x \in [1, 2[$, $g(x) = 1 - |x|$, donc $g(x) \underset{x \to 2^-}{\longrightarrow} -1 = g(-2) = g(2)$ par 4-périodicité.
Lorsque $x \in]2, 3[$, $g(x) = g(x-4) = 1 - |x-4|$, donc $g(x) \underset{x \to 2^+}{\longrightarrow} -1 = g(2)$. Ceci démontre que g est continue en 2. Alors, par 4-périodicité, g est continue en tout point de $2 + 4\mathbb{Z}$. En conclusion, on a montré que g est continue sur $\mathbb{R}$.
$\diamond$ (sur 1 point) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a < b$.
Posons $A = 2\mathbb{Z} \cap]a, b[$.
Premier cas : Supposons que $A = \emptyset$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $[a, b] \subset [2k, 2k+2]$, donc d'après le graphe de g, $g|_{[a,b]}$ a pour graphe un segment de droite de pente 1 ou -1. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, $\left| \, [g|_{[a,b]}]'(x) \, \right| = 1$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$.
Second cas : Supposons que $A \neq \emptyset$. A est une partie bornée de $\mathbb{Z}$, donc elle est finie. Notons $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ses éléments dans l'ordre croissant, avec $n = |A| + 1$. Posons également $a_0 = a$ et $a_n = b$. On est alors exactement dans la situation de la question précédente, avec $k = 1$. On peut donc affirmer que $|g(b) - g(a)| \leq |b - a|$.

3°) (sur 2 points) Pour tout $x \in [-2, 2[$, $|g(x)| = |1 - |x||$: c'est la distance entre $|x| \in [0, 2]$ et 1, donc $|g(x)| \leq 1$. Alors, par 4-périodicité, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)}x)\right| \leq \frac{1}{2^k}$, or la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$ est convergente, donc la série $\sum \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)}x)$ est absolument convergente, ce qui prouve que f est correctement définie sur $\mathbb{R}$ en entier.

Cela prouve également que f est bornée, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1$.

4°) (sur 4 points) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x) - h_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x) - h_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h(x) - h_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
h_N est continue en x_0, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $|h_N(x_0) - h_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - x_0| < \alpha$. Alors, par inégalité triangulaire,
$|h(x_0) - h(x)| \leq |h(x_0) - h_N(x_0)| + |h_N(x_0) - h_N(x)| + |h_N(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
Ceci démontre que h est continue en x_0, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

5°) (sur 3 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)}x)$.
D'après les théorèmes usuels, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{(2^k)}x)\right|$, donc par inégalité triangulaire et sachant que $|g|$ est majorée par 1, $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$.

Ainsi, $\frac{1}{2^n}$ majore $\{|f(x) - f_n(x)| \ / \ x \in \mathbb{R}\}$. Ceci prouve que $f - f_n$ est bornée et que ce majorant est plus grand que la borne supérieure, car par définition cette dernière est le plus petit des majorants. Ainsi, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le principe des gendarmes, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut alors appliquer la question précédente et affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

6°) $\diamond$ (sur 1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{(2^n)}x \in [2N, 2N + 2[$.
Si $2^{(2^n)}x \in [2N, 2N + 1]$, on peut choisir $\varepsilon_n = 1$.
Sinon, alors $2^{(2^n)}x \in [2N + 1, 2N + 2]$, et on peut choisir $\varepsilon_n = -1$.

$\diamond$ (sur 3 points) Supposons d'abord que $k > n$. Alors $2^{2^k} h_n = \varepsilon_n 2^{2^k - 2^n}$,
or $2^k - 2^n \geq 2^{n+1} - 2^n = 2^n \geq 2$, donc $2^{2^k} h_n$ est un multiple de 4, mais g est de période 4, donc $\left|g\left(2^{2^k}(x + h_n)\right) - g\left(2^{2^k}x\right)\right| = 0$.
Supposons maintenant que $k = n$.

Alors $\left|g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right| = \left|g\left(\varepsilon_n+2^{2^n}x\right)-g\left(2^{2^n}x\right)\right| = 1$, car il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $2^{(2^n)}x$ et $2^{(2^n)}x+\varepsilon_n$ sont tous deux dans l'intervalle $[2N, 2N+2]$, or sur cet intervalle, le graphe de g est un segment de droite de pente 1 ou -1.

7°) (sur 5 points) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$, d'après la question 2,
$\left|g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right| \leq \left|2^{2^k}h_n\right| \leq 2^{2^{n-1}}2^{-2^n} = 2^{-2^{n-1}}$ donc par inégalité triangulaire, $\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right)2^{-2^{n-1}} \leq 2^{-2^{n-1}}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| &= 2^{2^n}\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right| \\
&= 2^{2^n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right| \\
&= 2^{2^n}|A-B|,
\end{aligned}$$

où $A=\frac{1}{2^n}\left|g\left(2^{2^n}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^n}x\right)\right|$ et $B=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right)$.
D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, $|A-B|\geq|A|-|B|$, or d'après la question précédente, $|A|=\frac{1}{2^n}$, donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| &\geq 2^{2^n}\left(\frac{1}{2^n}-\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(g\left(2^{2^k}(x+h_n)\right)-g\left(2^{2^k}x\right)\right)\right|\right) \\
&\geq 2^{2^n}\left(2^{-n}-2^{-2^{n-1}}\right) = 2^{2^n-n}\left(1-2^{n-2^{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty
\end{aligned}$$

.

Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $\left|\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or h_n est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ telle que $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après la caractérisation séquentielle de la notion de limite de fonction, on a montré que, pour x fixé, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'admet pas de limite finie lorsque h tend vers 0 avec $h\in\mathbb{R}^*$. On a donc montré que f n'est pas dérivable en x, mais x est un réel quelconque, donc f est un exemple d'application définie et continue sur $\mathbb{R}$ en entier, mais qui n'est dérivable nulle part.

Problème 3 : Version faible du théorème de Singer (sur 40 points)

Partie I : Fonctions à schwarzienne négative. (sur 9 points)

1°) (sur 1 point) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. La fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'''(x)f'(x) - 3f''(x)^2 = 2 \times 0 \times (2ax+b) - 3 \times 4a^2 = -12a^2 < 0$, donc f appartient à $\mathcal{E}$.

2°) (sur 2 points) Comme f, g sont de classe $\mathcal{C}^3$, il en va de même de la fonction $g \circ f$. On calcule successivement : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$, $(g \circ f)'' = f'' \times (g' \circ f) + f'^2 \times (g'' \circ f)$ et $(g \circ f)''' = f''' \times (g' \circ f) + 3f'' \times f' \times (g'' \circ f) + f'^3 \times (g''' \circ f)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^{(\mathrm{s})} &= 2(g \circ f)'''(g \circ f)' - 3(g \circ f)''^2 \\
&= 2(f'''(g' \circ f) + 3f''f'(g'' \circ f) + f'^3(g''' \circ f))(f'(g' \circ f)) \\
&\quad -3(f''(g' \circ f) + f'^2(g'' \circ f))^2 \\
&= 2f'''f'(g' \circ f)^2 + 6f''f'^2(g'' \circ f)(g' \circ f) + 2f'^4(g''' \circ f)(g' \circ f) \\
&\quad -3f''^2(g' \circ f)^2 - 6f''f'^2(g' \circ f)(g'' \circ f) - 3f'^4(g'' \circ f)^2 \\
&= 2f'''f'(g' \circ f)^2 + 2f'^4(g''' \circ f)(g' \circ f) \\
&\quad -3f''^2(g' \circ f)^2 - 3f'^4(g'' \circ f)^2 \\
&= (g' \circ f)^2(2f'''f' - 3f''^2) + f'^4(2(g''' \circ f)(g' \circ f) - 3(g'' \circ f)^2) \\
&= (g' \circ f)^2(2f'''f' - 3f''^2) + f'^4[(2g'''g' - 3g''^2) \circ f],
\end{aligned}$$

ce qui montre que $(g \circ f)^{(\mathrm{s})} = (g' \circ f)^2 f^{(\mathrm{s})} + f'^4(g^{(\mathrm{s})} \circ f)$.

3°) (sur 2 points) Soient $f, g \in \mathcal{E}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $(g \circ f)'(x) \neq 0$.
$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$, donc $f'(x) \neq 0$ et $g'(f(x)) \neq 0$.
Ainsi, $f \in \mathcal{E}$ et $f'(x) \neq 0$, donc $f^{(\mathrm{s})}(x) < 0$.
De plus $g \in \mathcal{E}$ et $g'(f(x)) \neq 0$, donc $g^{(\mathrm{s})}(f(x)) < 0$. Alors d'après la question précédente,
$(g \circ f)^{(\mathrm{s})}(x) = \underbrace{(g' \circ f)^2(x)}_{>0} \times \underbrace{f^{(\mathrm{s})}(x)}_{<0} + \underbrace{f'^4(x)}_{>0} \times \underbrace{g^{(\mathrm{s})}(f(x))}_{<0} < 0$.
Cela démontre que $g \circ f \in \mathcal{E}$.

4°) (sur 4 points) $\diamond$ Comme $|f'|$ possède un minimum local en x_0, la fonction $\varphi = (f')^2$ possède aussi un minimum local en x_0. Or φ est dérivable au voisinage de x_0, donc d'après le cours $\varphi'(x_0) = 0$.
$\diamond$ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\varphi''(x_0) < 0$. La formule de Taylor-Young appliquée à la fonction φ (de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$) en x_0 à l'ordre 2 nous dit que
$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \dfrac{\varphi''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2)$,
donc pour h au voisinage de 0, $\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) \sim \dfrac{\varphi''(x_0)}{2}h^2 < 0$. Ceci démontre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $h \in]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$, $\varphi(x_0+h) < \varphi(x_0)$, c'est-à-dire que φ admet en x_0 un maximum local strict. C'est absurde ! Donc $\varphi''(x_0) \geq 0$.
$\diamond$ Raisonnons à nouveau par l'absurde en supposant que $f'(x_0) \neq 0$.
Alors, comme $f \in \mathcal{E}$, $(*) : 2f'''(x_0)f'(x_0) - 3f''(x_0)^2 = f^{(\mathrm{s})}(x_0) < 0$.

Par ailleurs, comme $\varphi'(x_0) = 2f''(x_0)f'(x_0)$ et $\varphi''(x_0) = 2f'''(x_0)f'(x_0) - 2f''(x_0)^2$, les conditions $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \geq 0$ établies précédemment impliquent que $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0)f'(x_0) \geq 0$, ce qui implique que $(**) : 2f'''(x_0)f'(x_0) - 3f''(x_0)^2 \geq 0$.
Les inégalités $(*)$ et $(**)$ sont contradictoires, donc $f'(x_0) = 0$.

Partie II : Points fixes attractifs (sur 18 points)

5°) (sur 2 points) La fonction $f : x \longmapsto x^3$ possède exactement trois points fixes, à savoir 0, 1 et -1. Comme $f'(0) = 0$ et $f'(-1) = f'(1) = 3$, on voit que le seul point fixe attractif de f est 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{\circ n}(x) = x^{3^n}$ par récurrence immédiate.
Si $x \in]-1, 1[$, alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or (x^{3^n}) est une suite extraite de (x^n), donc $f^{\circ n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $|x| \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{\circ n}(x)| \geq 1$, donc $f^{\circ n}(x)$ ne tend pas vers 0.
Par conséquent $\mathrm{B}_f(0) =]-1, 1[$.

6°) (sur 2 points) Comme ℓ est un point fixe de f, une récurrence immédiate montre que la suite $(f^{\circ n}(\ell))_{n\geq 0}$ est la suite constante égale à ℓ. Elle converge bien vers ℓ. Donc $\ell \in \mathrm{B}_f(\ell)$.
Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$ et posons $\mathrm{I}_f(\ell) = \bigcup\limits_{I\in\mathcal{I}} I$. Ce qui précède montre que $\{\ell\} \in \mathcal{I}$, donc $\ell \in \mathrm{I}_f(\ell)$. $\mathrm{I}_f(\ell)$ est une réunion d'intervalles possédant ℓ comme point commun, donc d'après le cours, $\mathrm{I}_f(\ell)$ est aussi un intervalle. Par construction, c'est bien le plus grand intervalle contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$.

7°) (sur 4 points) $\diamond$Soit $y \in f(B_f(\ell))$. Il existe $x \in B_f(\ell)$ tel que $y = f(x)$.
$x \in B_f(\ell)$, donc $f^{\circ n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $f^{\circ n}(y) = f^{\circ(n+1)}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi, $y \in B_f(\ell)$. Donc $f(\mathrm{B}_f(\ell)) \subset \mathrm{B}_f(\ell)$.
$\diamond$ Soit $x \in f^{-1}(B_f(\ell))$. On a $f(x) \in B_f(\ell)$. Alors $f^{\circ n+1}(x) = f^{\circ n}(f(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $f^{\circ n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Cela démontre que $x \in B_f(\ell)$. Donc $f^{-1}(\mathrm{B}_f(\ell)) \subset \mathrm{B}_f(\ell)$.
$\diamond$ La fonction f est continue et $\mathrm{I}_f(\ell)$ est un intervalle donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathrm{I}_f(\ell))$ est un intervalle.
Comme $\ell \in \mathrm{I}_f(\ell)$, on a $\ell = f(\ell) \in f(\mathrm{I}_f(\ell))$.
Enfin, comme $\mathrm{I}_f(\ell) \subset \mathrm{B}_f(\ell)$, on a $f(\mathrm{I}_f(\ell)) \subset f(\mathrm{B}_f(\ell)) \subset \mathrm{B}_f(\ell)$ d'après la question précédente.
Ainsi $f(\mathrm{I}_f(\ell))$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$. Et comme $\mathrm{I}_f(\ell)$ est, par définition, le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$, on en déduit que $f(\mathrm{I}_f(\ell)) \subset \mathrm{I}_f(\ell)$.

8°) (sur 4 points) $\diamond$ Par hypothèse, $|f'(\ell)| < 1$, donc il existe k tel que $|f'(\ell)| < k < 1$.
D'après les théorèmes usuels, $|f'|$ est continue en ℓ, donc d'après le lemme du tunnel, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[\, , |f'(x)| \leq k$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$\forall x, y \in \,]\ell-\alpha;\ell+\alpha[\,,\ |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$, ce qui signifie que f est k-lipschitzienne sur $]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$.

$\diamond$ En particulier, $\forall x \in \,]\ell-\alpha;\ell+\alpha[\,,\ |f(x)-\ell| = |f(x)-f(\ell)| \leq k|x-\ell|$.
Notamment, pour tout $x \in]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$, $|f(x)-\ell| \leq |x-\ell| < \alpha$, donc $f(x) \in]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$.
Ainsi l'intervalle $]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$ est stable par f.

$\diamond$ Soit $x \in]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$. Ce qui précède montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{\circ n}(x) \in]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$ et que $|f^{\circ(n+1)(x)} - \ell| \leq k|f^{\circ n}(x)-\ell|$, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{\circ n}(x)-\ell| \leq k^n|x-\ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $k \in [0,1[$. Alors, d'après le principe des gendarmes, $f^{\circ n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui prouve que $x \in B_f(\ell)$.
Ceci démontre que $]\ell-\alpha;\ell+\alpha[\subset \mathrm{B}_f(\ell)$.

9°) $\diamond$ (sur 3 points) Soit $x_0 \in \mathrm{B}_f(\ell)$.
Alors $f^{\circ n}(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{\circ m}(x_0) \in \,]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$.
D'après les théorèmes usuels, $f^{\circ m}$ est continue en x_0, donc d'après le lemme du tunnel, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in \,]x_0-\eta;x_0+\eta[\,,\ f^{\circ m}(x) \in \,]\ell-\alpha;\ell+\alpha[$.
Soit $x \in \,]x_0-\eta;x_0+\eta[$. Alors $f^{\circ m}(x) \in B_f(\ell)$, donc $f^{\circ n+m}(x) = f^{\circ n}(f^{\circ m}(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $x \in B_f(\ell)$. Ainsi, $]x_0-\eta;x_0+\eta[\subset \mathrm{B}_f(\ell)$.
Donc $B_f(\ell)$ est voisinage de chacun de ses points : c'est un ouvert.

$\diamond$ (sur 3 points) Soit $x_0 \in \mathrm{I}_f(\ell)$. A fortiori, x_0 appartient à $\mathrm{B}_f(\ell)$, qui est ouvert, donc il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0-\eta;x_0+\eta[\subset \mathrm{B}_f(\ell)$.
Dès lors, en tant qu'union d'intervalles possédant tous le point x_0, $\mathrm{I}_f(\ell) \cup]x_0-\eta;x_0+\eta[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$.
Et comme $\mathrm{I}_f(\ell)$ est le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$, il s'ensuit que $\mathrm{I}_f(\ell) \cup \,]x_0-\eta;x_0+\eta[= \mathrm{I}_f(\ell)$. On a donc $]x_0-\eta;x_0+\eta[\subset \mathrm{I}_f(\ell)$.
Cela démontre que $\mathrm{I}_f(\ell)$ est un ouvert.

Partie III : Version faible du théorème de Singer (sur 13 points)

10°) (sur 2 points) La fonction $f^{\circ 2}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $(f^{\circ 2})' = f' \times (f' \circ f)$.
La fonction f' est continue et ne s'annule pas sur $]a;b[$, donc f' garde un signe constant (strict) sur $]a;b[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
Comme d'après la question 7, $f(]a;b[) \subset \,]a;b[$, la fonction $f' \circ f$ a le même signe (strict) que la fonction f' sur $]a;b[$.
Par suite, la fonction $(f^{\circ 2})' = f' \times (f' \circ f)$ est le produit de deux fonctions de même signe (strict) sur $]a;b[$, donc $(f^{\circ 2})' > 0$ sur $]a;b[$.
De plus, on a $(f^{\circ 2})'(\ell) = f'(\ell)f'(f(\ell)) = f'(\ell)f'(\ell) = f'(\ell)^2 < 1$, car ℓ est un point fixe attractif, donc $(f^{\circ 2})'(\ell) < 1$.

11°) (sur 4 points)
$\diamond$ D'après la question 7, $f(\mathrm{I}_f(\ell)) \subset \mathrm{I}_f(\ell)$, donc $f(]a;b[) \subset \,]a;b[$, or f est continue en a, donc $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ est dans l'adhérence de $]a;b[$. Ainsi, $f(a) \in [a;b]$.

Par l'absurde, on suppose que $f(a) \in]a;b[$. Alors $f(a) \in \mathrm{I}_f(\ell)$ et donc $f(a) \in \mathrm{B}_f(\ell)$. Alors, d'après la question 7, $a \in \mathrm{B}_f(\ell)$. Dans ce cas, $[a;b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ et inclus dans $\mathrm{B}_f(\ell)$, ce qui contredit la maximalité de $\mathrm{I}_f(\ell) =]a;b[$. C'est absurde, donc $f(a) \notin]a;b[$.
Il s'ensuit que $f(a) \in \{a;b\}$.
On démontre de même que $f(b) \in \{a;b\}$.
$\diamond$ On a vu que, pour tout $x \in]a,b[$, $(f^{\circ 2})'(x) > 0$, or $(f^{\circ 2})'$ est continue, donc en passant à la limite, on montre que $(f^{\circ 2})'(a) \geq 0$ et $(f^{\circ 2})'(a) \geq 0$. Ainsi $f^{\circ 2}$ est croissante sur $[a,b]$. En particulier, on en déduit que $f^{\circ 2}(a) \leq f^{\circ 2}(b)$.
Or $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $\{a;b\}$, donc $f^{\circ 2}(a)$ et $f^{\circ 2}(b)$ appartiennent aussi à $\{a;b\}$. Alors on a nécessairement $f^{\circ 2}(a) = a$ et $f^{\circ 2}(b) = b$.

12°) (sur 1 point) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f^{\circ 2}$ (qui est bien dérivable) entre les points a et ℓ, on obtient l'existence de $\alpha \in]a;\ell[$ tel que $\dfrac{f^{\circ 2}(\ell) - f^{\circ 2}(a)}{\ell - a} = (f^{\circ 2})'(\alpha)$. Comme a et ℓ sont des points fixes de f, le quotient dans le membre de gauche vaut 1, ce qui donne $(f^{\circ 2})'(\alpha) = 1$.
De même, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f^{\circ 2}$ entre les points ℓ et b, on obtient l'existence de $\beta \in]\ell;b[$ tel que $(f^{\circ 2})'(\beta) = 1$.

13°) (sur 3 points) La fonction $(f^{\circ 2})'$ est continue sur le compact $[\alpha;\beta]$ donc, par le théorème des bornes atteintes, $(f^{\circ 2})'$ atteint son minimum sur $[\alpha;\beta]$.
On sait que $(f^{\circ 2})'(\alpha) = (f^{\circ 2})'(\beta) = 1$ et $(f^{\circ 2})'(\ell) < 1$ avec $\ell \in]\alpha;\beta[$. Par conséquent, le minimum de la fonction $(f^{\circ 2})'$ sur $[\alpha;\beta]$ est atteint en un point $x_m \in]\alpha;\beta[$ et l'on a, d'après la question 10, $0 < (f^{\circ 2})'(x_m) < 1$.
Comme f appartient à $\mathcal{E}$, d'après la question 3, $f^{\circ 2}$ appartient également à $\mathcal{E}$.
Or x_m est un minimum local de $f^{\circ 2}$ donc de $|f^{\circ 2}|$ (car $f^{\circ 2}$ est positive au voisinage de x_m), donc on peut appliquer la question 4 à la fonction $f^{\circ 2}$. On en déduit que $(f^{\circ 2})'(x_m) = 0$, ce qui est contradictoire.
Conclusion, si $\mathrm{I}_f(\ell)$ est un intervalle borné, alors f' s'annule au moins une fois sur $\mathrm{I}_f(\ell)$.

14°) (sur 3 points) $\diamond$ Si ℓ_1 et ℓ_2 désignent deux points fixes attractifs distincts de f, alors $\mathrm{B}_f(\ell_1)$ et $\mathrm{B}_f(\ell_2)$ sont disjoints (sinon il existerait x tel que $f^{\circ n}(x)$ tende à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui n'est pas raisonnable !).
On en déduit notamment que l'application $\ell \longmapsto B_f(\ell)$ est une bijection de l'ensemble des points attractifs de f vers l'ensemble des bassins d'attraction. Ainsi, pour dénombrer les points fixes attractifs de f, il suffit de compter les bassins d'attraction de f.
$\diamond$ Si ℓ est un point fixe attractif tel que $\mathrm{I}_f(\ell)$ est non majoré, alors $\mathrm{B}_f(\ell)$ contient $[\ell;+\infty[$ (puisque $\mathrm{B}_f(\ell)$ inclus $\mathrm{I}_f(\ell)$ qui est un intervalle non majoré contenant ℓ). Dans ce cas, aucun autre bassin d'attraction ne peut être non majoré (sinon ce bassin ne serait pas disjoint de $\mathrm{B}_f(\ell)$ au voisinage de $+\infty$). On retient donc qu'il y a au plus un bassin d'attraction non majoré.
De même, on démontre qu'il y a au plus un bassin d'attraction non minoré.

◇ Reste le cas d'un point fixe attractif ℓ dont le bassin d'attraction $\mathrm{B}_f(\ell)$ est borné. Dans ce cas, $\mathrm{I}_f(\ell)$ est borné et le résultat de la question précédente s'applique : sur $\mathrm{I}_f(\ell)$, la fonction f' s'annule au moins une fois. Comme l'hypothèse nous dit que f' s'annule en n points distincts, on en déduit qu'il y a au plus n bassins d'attraction bornés.

Cela fait donc au plus $n+2$ bassins d'attraction, ce qui implique que f a au plus $n+2$ points fixes attractifs.