Résumé de cours :
Semaine 34, du 17 juin au 21 juin.

Les probabilités

1 Espaces probabilisés

Définition. On appelle tribu, ou σ-algèbre sur un ensemble Ω tout ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant : $\Omega \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire (si $F \in \mathcal{F}$ alors $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}$) et $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable (si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$).

Vocabulaire spécifique aux probabilités : Avec les notations précédentes,
- ◇ Ω s'appelle l'univers.
- ◇ Les éléments de $\mathcal{F}$ s'appellent les **événements**.
- ◇ Si $\{\omega\} \in \mathcal{F}$, on dit que c'est un **événement élémentaire**.
- ◇ $\emptyset$ est l'événement impossible.
- ◇ Si A est un événement, $\Omega \setminus A$ est l'événement contraire de A.
- ◇ Si A et B sont deux événements, $A \cap B$ est l'événement "A et B", $A \cup B$ est l'événement "A ou B". Lorsque $A \cap B = \emptyset$, les deux événement A et B sont dits incompatibles.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un univers Ω. On appelle système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i\in I}$ (où I est fini ou dénombrable) d'événements 2 à 2 disjoints dont la réunion vaut Ω.

Définition. Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur un univers Ω, on dit que $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace probabilisable.

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. On dit que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si et seulement si P est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n)$.
Dans ce cas, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé un espace probabilisé.

Propriété. Avec les notations précédentes, pour $F, G, H, F_n \in \mathcal{F}$ on a :
- ◇ $P(\emptyset) = 0$,
- ◇ Si $F_0, \dots, F_p$ sont $p + 1$ événements deux à deux disjoints, où $p \geq 1$,

alors $P\Big(\bigcup_{n=0}^{p} F_n\Big) = \sum_{n=0}^{p} P(F_n)$.
- ◇ $P(\overline{F}) = 1 - P(F)$ (où $\overline{F}$ désigne $\Omega \setminus F$),
- ◇ si $G \subset H$, $P(H \setminus G) = P(H) - P(G)$.
- ◇ si $G \subset H$, $P(G) \leq P(H)$ (on dit que P est croissante),
- ◇ $P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H)$,
- ◇ **Inégalité de Boole :** $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(F_n)$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. On notera souvent $P(G,H) \triangleq P(G \cap H)$.

Propriété : Probabilité sur un univers dénombrable. Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on prendra toujours $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Dans ce cas, pour se donner une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$, il faut et il suffit de donner une famille sommable $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$. On définit alors P par : pour tout $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = \sum_{\omega\in F} p_\omega$.

Définition. Supposons que Ω est de cardinal fini. On dit que P est la probabilité uniforme lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables. Dans ce cas, avec les notations de la propriété précédente, pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$, et pour tout $F \in \mathcal{F}$, $P(F) = \dfrac{\mathrm{Card}(F)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Propriété de continuité : dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
si (F_n) est une suite croissante d'événements, $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$.
Si (F_n) est une suite décroissante d'événements, $P\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. On dit que l'événement F est négligeable si et seulement si $P(F) = 0$.
On dit que l'événement F est presque sûr si et seulement si $P(F) = 1$.
Si $\mathcal{Q}$ est une propriété dépendant de $\omega \in \Omega$, lorsque $\{\omega \in \Omega / \mathcal{Q}(\omega)\}$ est un événement presque sûr, on dit que "$\mathcal{Q}(\omega)$ presque sûrement".

Propriété. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Définition. Si $P(G) > 0$, $\boxed{P(H|G) \triangleq \dfrac{P(H \cap G)}{P(G)}}$: c'est la probabilité conditionnelle de H sachant que G est réalisé. L'application $H \longmapsto P(H|G)$ est une probabilité sur Ω, notée P_G.
Ainsi, $P(H|G) = P_G(H) = \dfrac{P(H\cap G)}{P(G)}$.

Formule des probabilités composées :
si $G_1, \dots, G_k$ sont k événements tels que $P(G_1 \cap \cdots \cap G_{k-1}) > 0$, alors
$P(\bigcap_{i=1}^{k} G_i) = P(G_1) \times P(G_2|G_1) \times P(G_3|G_1 \cap G_2) \times \cdots \times P(G_k|G_1 \cap \cdots \cap G_{k-1})$.

Formule des probabilités totales : si $(G_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements, où I est fini ou dénombrable, et si pour tout $i \in I$, $P(G_i) > 0$, alors $P(G) = \sum_{i\in I} P(G|G_i)P(G_i)$.

Formule de Bayes : Si $P(G) \in]0,1[$ et $P(H) > 0$, alors $\boxed{P(G|H) = \dfrac{P(H|G)P(G)}{P(H|G)P(G) + P(H|\overline{G})P(\overline{G})}}$

Si $(G_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements avec pour tout $i \in I$, $P(G_i) > 0$, et si $P(H) > 0$, alors $\boxed{P(G_i|H) = \dfrac{P(H|G_i)P(G_i)}{\sum_{j\in I} P(H|G_j)P(G_j)}}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. $\boxed{H \text{ et } G \text{ sont indépendants si et seulement si } P(G \cap H) = P(G)P(H)}$.

Propriété. Si H et G sont indépendants, alors H et $\overline{G}$ sont aussi indépendants.

Remarque. Un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $P(A) \in \{0, 1\}$.

Définition. I étant un ensemble quelconque, les événements de la famille $(G_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants si et seulement si pour toute partie finie J de I, $P\Big(\bigcap_{i\in J} G_i\Big) = \prod_{i\in J} P(G_i)$.

Remarque. "mutuellement indépendants" $\Longrightarrow$ "2 à 2 indépendants", mais la réciproque est fausse.

Propriété. Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Si l'on remplace certains G_i par leur conjugué $\overline{G_i}$, alors c'est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

3 Variables aléatoires discrètes

Définition. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E muni d'une tribu $\mathcal{E}$ est une fonction $X \ : \ \Omega \longrightarrow E$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.
On note souvent "$X \in A$" au lieu de $X^{-1}(A)$.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.
Lorsque $E = \mathbb{N}$, on dit que X est une variable aléatoire entière.

Propriété. Avec les notations précédentes, si l'on pose, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $P_X(A) = P(X \in A)$, **alors P_X est une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$ que l'on appelle la loi de X.**

Définition. Si B est un événement de Ω, la loi de X conditionnée par B désigne l'application $A \longmapsto P(X \in A|B) = \dfrac{P((X \in A) \cap B)}{P(B)}$, de $\mathcal{E}$ dans $[0, 1]$. C'est encore une probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

Définition. On dit qu'une variable aléatoire X est discrète si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et si $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$.

Remarque. Le programme de MP ne prévoit que l'étude des variables aléatoires discrètes, ce que nous supposerons donc dorénavant.

Propriété. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et X une application de Ω dans un ensemble quelconque E. X est une variable aléatoire discrète si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et si, pour tout $d \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{d\}) \in \mathcal{F}$.
Dans ce cas, la loi de X est entièrement déterminée par la famille $(P(X = d))_{d\in X(\Omega)}$.

Remarque. Toute variable aléatoire entière est discrète.

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète de Ω dans E et f une application de E dans un ensemble F. Alors $Y = f(X) \stackrel{\Delta}{=} f \circ X$ est une nouvelle variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par : $\forall y \in F, \ \ P_Y(y) = P(X \in f^{-1}(\{y\})) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ f(x)=y}} P_X(x)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit X une variable aléatoire de Ω dans un ensemble E de cardinal fini. On dit que X suit une loi uniforme (souvent notée $\mathcal{U}$) si et seulement si P_X est la probabilité uniforme, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $k \in E$, $P(X = k) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(E)}$.

Définition. On fixe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Les lois classiques au programme sont les suivantes :

— Loi de dirac, lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(X = n_0) = 1$ et $P(X = n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$. On dit alors que X est une variable aléatoire déterministe, ou bien constante.

— **Loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(p)$:
$\boxed{P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p}$.
C'est le cas lorsque X représente le succès ($X = 1$) ou l'échec ($X = 0$) d'une épreuve.

— **Loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(n, p)$:
Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}$ (et $P(X = m) = 0$ pour $m \notin \{0, \dots, n\}$). C'est le cas lorsque X désigne le nombre de succès parmi une suite de n épreuves indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.

— **Loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{G}(p)$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p}$ (et $P(X = 0) = 0$).
C'est le cas lorsque X représente l'instant du premier succès lors d'une suite d'épreuves indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.

— **Loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}}$.

Notation. On utilisera la notation $X \sim \mathcal{L}$ pour indiquer que la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{L}$ et la notation $X \sim Y$ pour indiquer que les deux variables aléatoires suivent la même loi.

Propriété. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$ si et seulement si il existe un événement A tel que $X = 1_A$. Dans ce cas, on a $X = 1_A \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = P(A)$.

Définition. Si X est une variable aléatoire réelle, l'application $x \longmapsto P(X \leq x)$ est la fonction de répartition de X.

Définition. Hors programme : Convergence en loi :
Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une autre variable aléatoire réelle. On dit que X_k converge en loi vers X lorsque k tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) = 0$, $P(X_k \leq x) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} P(X \leq x)$. on note alors $X_k \underset{k \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X$.

Propriété. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires entières et X une autre variable aléatoire entière. $X_k \underset{k \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} X \iff [\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_k = n) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} P(X = n)]$.

Propriété. Pour les variables aléatoires entières, les lois géométriques sont les seules lois sans mémoire. Plus précisément, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, elle est sans mémoire, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ $P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$, si et seulement si il existe $p \in]0, 1[$ tel que $X \sim \mathcal{G}(p)$.
Il faut savoir le démontrer.

4 Variables aléatoires indépendantes

4.1 Lois conjointes et lois marginales

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X_1, \dots, X_n$ est une suite de n variables aléatoires discrète de Ω dans des ensemble E_i, alors, en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, on définit une variable aléatoire discrète $X \triangleq (X_1, \dots, X_n)$ de Ω dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.
On dit que la loi de X est la loi conjointe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi de X_i est appelée la $i$ème loi marginale de X.

Exemple. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires entières. On note $(p_{1,k}) = (P(X_1 = k))$ la première loi marginale de X et $(p_{2,k}) = (P(X_2 = k))$ la seconde loi marginale.
On note également $c_{h,k} = P(X = (h, k))$ la loi conjointe. Alors $p_{1,k} = \sum_{h \in \mathbb{N}} c_{k,h}$ et $p_{2,k} = \sum_{h \in \mathbb{N}} c_{h,k}$.

Définition. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $h \in X_2(\Omega)$ tel que $P(X_2 = h) > 0$, la loi conditionnelle de X_1 sachant que $X_2 = h$ désigne la probabilité $A \longmapsto P(X_1 \in A | X_2 = h)$ (définie sur $\mathcal{P}(X_1(\Omega))$). Elle est caractérisée par la suite des $(P(X_1 = k | X_2 = h))_{k \in \mathbb{N}}$. On définit de même la loi conditionnelle de X_2 sachant que $X_1 = k$.

Exemple. Avec les notations de l'exemple précédent, $P(X_1 = k | X_2 = h) = \dfrac{c_{k,h}}{p_{2,h}}$.

4.2 Indépendance

Définition. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-uplet de variables discrètes. Elles sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$, $P(X = k) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = k_i)$.

Propriété. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour toute famille $K_1, \ldots, K_n$ de parties de $X_1(\Omega), \ldots, X_n(\Omega)$, $P(X_1 \in K_1, \ldots, X_n \in K_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in K_i)$.

Remarque. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors elles sont 2 à 2 indépendantes, mais la réciproque est fausse.

Définition. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes, avec I de cardinal infini, on dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour toute partie finie J incluse dans I, les variables aléatoires X_j pour $j \in J$ sont mutuellement indépendantes.

Propriété. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de Ω dans E et F respectivement. Soit $f : E \longmapsto E'$ et $g : F \longmapsto F'$ deux fonctions. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont encore deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut généraliser l'énoncé et la démonstration au cas suivant : Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in I}$ correctement définies, $(f_i(X_i))_{i \in I}$ est encore une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Corollaire. Soit $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. Alors pour toutes fonctions f et g correctement définies, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont indépendantes.

Remarque. Là encore, on peut généraliser ...

Propriété. Soit $X_1, \ldots, X_m$ des variables aléatoires entières mutuellement indépendantes. On suppose qu'il existe $p \in [0, 1]$ tel que, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, où $n_i \in \mathbb{N}^*$ (p ne dépend pas de i). Alors $X_1 + \cdots + X_m \sim \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_m, p)$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On en déduit que le nombre de succès parmi une suite de m épreuves indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres m et p.

> **Exercice.** Soit $X_1, \ldots, X_m$ des variables aléatoires entières mutuellement indépendantes telles que chaque X_i suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$. Montrer que $X = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$.
> Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(p_n) \in]0, 1[^{\mathbb{N}}$ telle que $np_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Alors X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Vue la démonstration, l'approximation de la loi de X_n par une loi de Poisson est d'autant plus valable que $k << n$ et $\lambda << n$.

Application : Dans une file d'attente, supposons que le nombre moyen d'individus arrivant entre les temps 0 et 1 vaut $\lambda > 0$. On note N la variable aléatoire égale au nombre d'individus arrivant dans la file d'attente entre les temps 0 et 1. On suppose que, pour n suffisamment grand, au plus un individu arrive entre les temps $\frac{i-1}{n}$ et $\frac{i}{n}$ (c'est l'hypothèse des événements rares). Alors N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Définition. Une loi discrète sur un ensemble E est la donnée d'une probabilité P sur E muni de sa tribu pleine $\mathcal{P}(E)$ telle que, en posant $S = \{x \in E / P(x) > 0\}$, on ait $\sum_{x \in S} P(\{x\}) = 1$. Alors S est au plus dénombrable et, pour tout $B \subset E$, $P(B) = P(B \cap S)$.

Théorème. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{L}_n$ une loi discrète sur E_n. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{L}_n$.

Remarque. Ce théorème prouve l'existence d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(p)$, où $p \in]0, 1[$ ne dépend pas de n. Cette suite modélise une succession infinie d'épreuves indépendantes qui ont toutes la même probabilité de succès, égale à p.

Propriété. Avec les notations de cette remarque, si X est la variable aléatoire égale à l'instant du premier succès : $X(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* / X_k(\omega) = 1\}$. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

5 L'espérance

Définition. Soit X est une variable aléatoire discrète à valeurs réelles.

◇ Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $E(X) \triangleq \sum_{d \in X(\Omega)} d.P(X = d) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

◇ Sinon, on dit que X est d'espérance finie si et seulement si $(d.P(X = d))_{d\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas, $E(X) \triangleq \sum_{d \in X(\Omega)} d.P(X = d)$.

Remarque. $E(X)$ ne dépend que de la loi de X.

Propriété. Si Ω est fini ou dénombrable, alors $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$.

Propriété. Si A est un événement de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
alors $\boxed{P(A) = E(1_A)}$, où 1_A désigne la fonction caractéristique de la partie A de Ω.

Définition. Une variable aléatoire réelle est dite centrée si et seulement si $E(X) = 0$.

> **Exercice.** Montrer qu'une variable aléatoire réelle et positive est centrée si et seulement si elle est nulle presque sûrement.
> Il faut savoir le démontrer.

Théorème de transfert : Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. $g(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(g(d).P(X = d))_{d\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas, $E(g(X)) = \sum_{d\in X(\Omega)} g(d)P(X = d)$. Il faut savoir le démontrer.

Linéarité de l'espérance :
On note $L^1(\Omega, P)$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes de Ω dans $\mathbb{R}$ d'espérance finie.
$L^1(\Omega, P)$ est un espace vectoriel et pour tout $X, Y \in L^1(\Omega, P)$, $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $X \in L^1(\Omega, P)$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b \in L^1(\Omega, P)$ et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Propriété. Soit $X \in L^1(\Omega, P)$. Si X est presque sûrement constante égale à c, alors $E(X) = c$.
X est presque sûrement constante si et seulement si X est presque sûrement égale à son espérance.

Propriété. $X \geq 0 \Longrightarrow E(X) \geq 0$.

Propriété. Croissance de l'espérance : si $X, Y \in L^1$, alors $X \leq Y \Longrightarrow E(X) \leq E(Y)$.

Propriété. Inégalité triangulaire : $X \in L^1 \Longleftrightarrow |X| \in L^1$ et dans ce cas, $|E(X)| \leq E(|X|)$.

Propriété de comparaison : Soit X une variable aléatoire discrète complexe et $Y \in L^1$ telles que $|X| \leq Y$. Alors $X \in L^1$.

Formule. Inégalité de Markov : Si $X \geq 0$ et $a > 0$, alors $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Si $X_1, \ldots, X_k$ sont k variables aléatoires discrètes réelles d'espérances finies et **mutuellement indépendantes**, alors $X_1 \times \cdots \times X_k$ est d'espérance finie et
$E(X_1 \times \cdots \times X_k) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_k)$. La réciproque est fausse.
Il faut savoir le démontrer.