MPSI 2

Programme virtuel des colles de mathématiques.

Semaine (virtuelle) 31 : du lundi 24 au vendredi 28 juin.

Probabilités et théorie de l'intégration

Liste des questions de cours

1°) Enoncer et démontrer la propriété de continuité de P pour une suite croissante (resp : décroissante) d'événements.

2°) Enoncer et démontrer la formule de Bayes.

3°) Les lois géométriques sont les seules lois sans mémoire : énoncé précis et démonstration.

4°) Si X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, montrer que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Si $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes, montrer que $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont indépendantes.

5°) Si $X_1, \ldots, X_m$ sont mutuellement indépendantes avec pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, montrer que $X_1 + \cdots + X_m \sim \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_m, p)$.

6°) Si $np_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, montrer que X_n converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

7°) Énoncer et démontrer le théorème de transfert.

8°) Énoncer et démontrer la propriété de linéarité de l'espérance.

9°) Démontrer l'inégalité de Markov, puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ainsi que la loi faible des grands nombres.

10°) Énoncer puis démontrer une formule donnant la variance d'une somme de variables aléatoires de $L^2(\Omega, P)$.

11°) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli, puis la loi binomiale.

12°) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

13°) Montrer que toute application continue de $[a, b]$ dans un Banach E est une application réglée.

14°) Comment définit-on l'intégrale sur $[a, b]$ d'une application réglée ? On justifiera en détails.

15°) Énoncer et démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

16°) Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse.

Les probabilités

1 Espaces probabilisés

Tribu ou σ-algèbre sur un univers Ω.
événements, événements élémentaires, événement contraire d'un événement, événements incompatibles.

Système complet d'événements.

Probabilité P sur un espace probabilisable, σ-additivité de P.

$P(\overline{F}) = 1 - P(F)$, $P(H \setminus G) = P(H) - P(G)$, croissance de P, $P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H)$, Inégalité de Boole.

Lorsque Ω est fini ou dénombrable, on prendra toujours la tribu pleine. Les probabilités P sont alors caractérisées par la donnée d'une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs telle que $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Lorsque Ω est fini et que P est la probabilité uniforme, pour tout $F \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(F) = \dfrac{\mathrm{Card}(F)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Continuité de P pour une suite croissante (resp : décroissante) d'événements.

Événement négligeable, événement presque sûr.

2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Si $P(G) > 0$, $P(H|G) \triangleq \dfrac{P(H \cap G)}{P(G)} = P_G(H)$: c'est la probabilité conditionnelle de H sachant que G est réalisé. P_G est une probabilité sur Ω.

Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
Formule de Bayes.

Événements 2 à 2 indépendants ou mutuellement indépendants.
Stabilité par passage au complémentaire.

3 Variables aléatoires discrètes

Variable aléatoire réelle, variable aléatoire entière, loi d'une variable aléatoire.

Le programme des CPGE se limite aux variables aléatoires discrètes.
Si X est une variable aléatoire discrète, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète.

Loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Dirac
loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires réelles.

Les lois géométriques sont les seules lois sans mémoire.

4 Variables aléatoires indépendantes

4.1 Lois conjointes et lois marginales

Si $X_1, \ldots, X_n$ est une suite de n variables aléatoires discrètes, alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est une variable aléatoire discrète.
Loi conjointe, lois marginales.

4.2 Indépendance

Variables aléatoires 2 à 2 indépendantes, mutuellement indépendantes.

Si X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ sont indépendantes.

Si $X_1, \dots, X_m$ sont indépendantes avec $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, alors $X_1 + \cdots + X_m \sim \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_m, p)$.
Hors programme : si $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ et $X_1, \dots, X_m$ indépendantes, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

Si $np_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, alors X_n converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.
Modélisation informelle d'une file d'attente . Le nombre d'individus arrivant dans la file d'attente pendant une unité de temps suit une loi de Poisson.

Théorème admis : Si $(\mathcal{L}_n)$ est une suite de lois discrètes, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{L}_n$.

5 Espérance et variance

5.1 L'espérance

$E(X)$ ne dépend que de la loi de X.
Variable aléatoire centrée. Centré et positif $\Longrightarrow$ nul presque sûrement.

$P(A) = E(1_A)$.

Théorème de transfert.

Linéarité de l'espérance.
Définition de l'espace vectoriel $L^1(\Omega, P)$.

Croissance de l'espérance, inégalité triangulaire.

Propriété de comparaison : si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1(\Omega, P)$, alors $X \in L^1(\Omega, P)$.

Inégalité de Markov.

Si $X_1, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, alors $E(X_1 \times \cdots \times X_k) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_k)$.

5.2 La variance

Moment d'ordre k d'une variable aléatoire.
$L^2(\Omega, P)$ est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, P)$.

Covariance, variance, écart type.
$Var(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante.
Variable aléatoire réduite : $Var(X) = 1$.

Formule de Koenig-Huygens.

$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Variance d'une somme de variables aléatoires de $L^2(\Omega, P)$.

Inégalités de Cauchy-Schwarz et cas d'égalités.
Coefficient de corrélation linéaire (hors programme).

Espérance et variance pour la loi de Bernoulli, la loi binomiale, la loi géométrique et la loi de Poisson.

6 Propriétés de convergence

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Convergence en probabilité.

Loi faible des grands nombres.

Théorie de l'intégration

On fixe $f \ : \ [a,b] \longrightarrow E$, où E est un Banach.

7 Intégration des applications en escalier

7.1 Les applications en escalier

Subdivision de $[a,b]$, pas d'une subdivision, support d'une subdivision.
Subdivision plus fine qu'une autre. Union de deux subdivisions.

Applications en escalier de $[a,b]$ dans E.
Subdivision de $[a,b]$ adaptée à une application en escalier.

7.2 Intégrale d'une application en escalier

Construction de l'intégrale et propriétés usuelles : linéarité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles.

8 Les applications réglées (hors programme)

8.1 Définition

$\mathcal{R}([a,b],E)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}([a,b],E)$ dans $(\mathcal{B}([a,b],E), \|.\|_\infty)$.

8.2 Les applications continues par morceaux

Toute application continue par morceaux est réglée.

Hors programme : f est réglée si et seulement si elle admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.
Les applications monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont réglées.
Le produit de deux applications réglées est réglé.

9 Intégration des applications réglées

9.1 Construction

Si $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow}} f$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)\ dt \Big)$.

9.2 Propriétés

Linéarité de l'intégrale.

Si u est linéaire et continue, alors $\displaystyle\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right)$.

Lorsque f est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie (resp : un produit cartésien d'espaces de Banach) expression de $\int_a^b f(t)\ dt$ en fonction des applications coordonnées dans une base (resp : des applications composantes).

Inégalité triangulaire, croissance de l'intégrale.

Lorsque f est réglée, $\int_a^b f(t)\ dt$ ne change pas si l'on modifie f en un nombre fini de valeurs.

Relation de Chasles.

10 Sommes de Riemann

Somme de Riemann associée à une application et à une subdivision pointée.

Approximation de $\int_a^b f(t)\ dt$ par des sommes de Riemann.

Exercice : lemme de Riemann-Lebesgue.

11 Primitives

Pour ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie.

Définition : $g\ : I \longrightarrow E$ est une primitive de f si et seulement si g est dérivable sur I et $g' = f$.

Lorsque f est réglée sur I, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est continue.

Théorème fondamental de l'analyse : Lorsque f est continue sur I, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Si f est **continue**, positive et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.