DM 1 : suites récurrentes d'ordre 1

Partie I : Un premier exemple

Dans cette partie, f désigne l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1°) Tracer le tableau de variation de f.

On choisit arbitrairement un réel que l'on note x_0, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, on convient que $x_{n+1} = f(x_n)$. On définit ainsi par récurrence une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2°) S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, montrer que $\ell = 0$.

3°) Lorsque $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$, montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

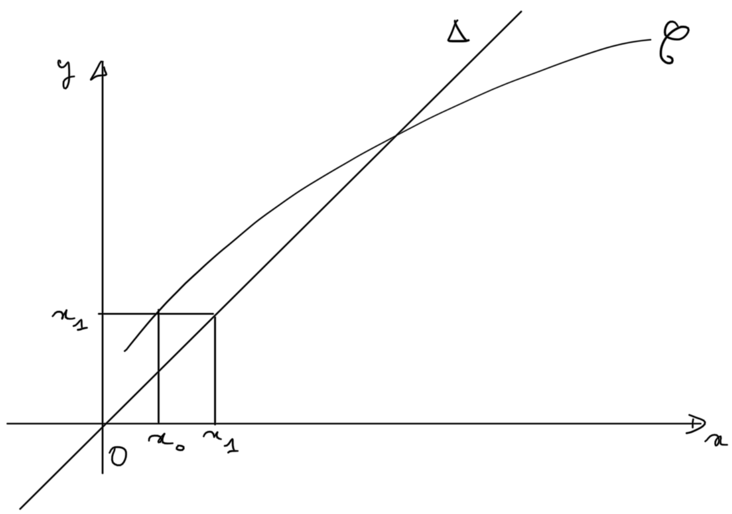
4°) Qu'en est-il lorsque $x_0 < 0$?

Partie II : Un peu de théorie

Dans cette partie, f désigne une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On notera D son domaine de définition.
On choisit arbitrairement un élément de D que l'on note x_0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on convient, lorsque c'est possible, que $x_{n+1} = f(x_n)$.

5°) Pour cette seule question, on suppose que $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$.
Pour quelles valeurs de x_0 la suite (x_n) est-elle définie ?

6°) Expliquer la figure suivante, où Δ désigne la droite d'équation $y = x$ et où $\mathcal{C}$ est le graphe de f.
Recopier la figure sur votre copie et poursuivre, sur la figure de votre copie, la construction de la suite (x_n). Qu'observe-t-on ?



7°) On suppose que $f(D) \subset D$ et que f est croissante sur D.
Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est monotone.

8°) On suppose maintenant que $f(D) \subset D$ et que f est décroissante sur D.
Montrer que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires.

On rappelle que lorsque f est continue sur D, pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, s'il existe $\ell \in D$ tel que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

9°) On suppose que $f(D) \subset D$ et que f est continue sur D.
Montrer que s'il existe $\ell \in D$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

Lorsque $f(\ell) = \ell$, on dit que ℓ est un point fixe de f.
Pour la fin de cette partie seulement, on suppose que $f(x) = 1 - x^2$.

10°) Déterminer les points fixes de f.
Donner le tableau de variation de f. On y placera les points fixes de f.
Déterminer le signe de $f(x) - x$ et de $(f \circ f)(x) - x$ en fonction du réel x.

11°) On suppose que $x_0 \in]-\infty, 1]$.
En discutant selon la valeur de x_0, étudier la convergence de la suite (x_n).
On commencera par conjecturer les résultats à l'aide d'une figure.

Partie III : Point fixe attractif ou répulsif

12°) Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$.
On rappelle que dans ces conditions, f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(\beta)$.
Montrer que $f(\alpha) \displaystyle\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\, dt \leq f(\beta) \int_a^b g(t)\, dt$.

En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ dt = f(c)\int_a^b g(t)\ dt$ (c'est la formule de la moyenne).

13°) Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une application de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ (c'est l'égalité des accroissements finis).

Pour la suite de cette partie, on suppose que a et b sont deux réels avec $a < b$ et que f est une application de classe C^1 définie sur $[a,b]$, vérifiant que $f([a,b]) \subset [a,b]$.
À nouveau, on choisit arbitrairement un élément de $[a,b]$ que l'on note x_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_{n+1} = f(x_n)$.

14°) Montrer que f possède au moins un point fixe.

Pour la suite de cette partie, on choisit un point fixe de f que l'on notera ℓ.

15°) Dans cette question, on suppose que $\ell \in]a,b[$ et que $|f'(\ell)| < 1$.
Soit k un réel tel que $|f'(\ell)| < k < 1$.
On admettra que la continuité de f' implique l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset [a,b]$ et tel que, pour tout $t \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, $|f'(t)| \leq k$.
Montrer que $f(]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[) \subset]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et que, lorsque $x_0 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (on dit que ℓ est un point fixe attractif).

16°) Dans cette question, on suppose que $\ell \in]a,b[$ et que $|f'(\ell)| > 1$.
Soit k un réel tel que $|f'(\ell)| > k > 1$.
On admettra que la continuité de f' implique l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\subset [a,b]$ et tel que, pour tout $t \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, $|f'(t)| \geq k$.
Montrer que lorsque $x_0 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et que $x_0 \neq \ell$,
il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \notin]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ (on dit que ℓ est un point fixe répulsif).

17°) On suppose pour cette seule question que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1 + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}$.
Montrer que f possède un unique point fixe (on ne demande pas de le calculer) et que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, la suite (x_n) converge vers ce point fixe.

Partie IV : Méthode de Newton

18°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une application de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a, b \in I$, montrer que $\displaystyle f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\ dt$.
En déduire que s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$, $|f''(t)| \leq k$, alors pour tout $a, b \in I$, $|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{2}k$.

Pour toute la suite de cette partie, on suppose que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est une application de classe C^3 de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

On choisit x_0 dans I et on définit la suite (x_n) par récurrence en convenant que x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse x_n.
On suppose que la suite (x_n) est bien définie, c'est-à-dire qu'à chaque étape de sa construction, la tangente au graphe de f en le point d'abscisse x_n coupe l'axe Ox en un point dont l'abscisse x_{n+1} est encore dans I.

19°) Donner une expression de x_{n+1} en fonction de x_n, f et f'.
Si (x_n) converge vers $\ell \in I$, montrer que $f(\ell) = 0$.
Sur une figure, visualiser la suite (x_n) et sa convergence vers un zéro de f.

20°) On suppose qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = 0$.
On suppose de plus qu'il existe $a, b \in I$ tels que $a < \ell < b$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon, C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, si $x_0 \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leq C\ 10^{-(2^n)}$ (on dit que la convergence de x_n vers ℓ est quadratique).