# DM 2

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.**
**Il n'est pas à rendre.**
**Un corrigé sera fourni jeudi 12 septembre.**

## Partie I : Homographies

Dans cette première partie, $a, b, c, d$ désignent 4 réels fixés et on note $h$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par l'égalité $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

**1°)** Pour cette question, on suppose que $a = c = 1$, $b = -2$ et $d = -1$.
- Déterminer le domaine de définition de $h$.
- Calculer la dérivée de $h$ puis représenter le tableau de variations de $h$.
- Tracer le graphe de $h$. On se contentera pour cela de placer les asymptotes, les points du graphe de $h$ d'abscisses 0 et 2 ainsi que leurs tangentes, puis de faire un tracer régulier et propre à main levée.

**2°)** En discutant selon les valeurs de $a, b, c, d$, calculer le domaine de définition de $h$.

**3°)** Calculer les intégrales suivantes :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x+1}\,dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$.

**4°)** On suppose que le domaine de définition de $h$ est non vide.
Montrer que $h$ est constante si et seulement si $ad - bc = 0$.

Pour toute la suite de ce problème, $\infty$ désigne un élément tel que $\infty \notin \mathbb{R}$.
On note $S = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

**5°)** On suppose que $ad - bc \neq 0$.
- Lorsque $c \neq 0$, on pose $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$.
- Lorsque $c = 0$, on convient que $h(\infty) = \infty$.

Montrer que $h$ est une bijection de $S$ dans $S$.

Pour toute la suite du problème, une homographie désignera une application $h$ de $S$ dans $S$ telle qu'il existe 4 réels $a, b, c, d$ avec $ad - bc \neq 0$ vérifiant :

- Si $c \neq 0$,
  - pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
  - $h(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{a}{c}$ ;
- Si $c = 0$,
  - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+b}{d}$ et
  - $h(\infty) = \infty$.

**6°)** Vérifier que la bijection réciproque d'une homographie est encore une homographie.

## Partie II : Composées d'homographies

On convient que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

- $\beta + \infty = \infty + \beta = \infty$ et
- $\frac{\beta}{\infty} = 0$.

On convient également que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$,

- $\beta\infty = \infty\beta = \infty$ et
- $\frac{\beta}{0} = \infty$.

Si $\alpha$ est un réel, on note $T_\alpha$ l'application de $S$ dans $S$ définie par $T_\alpha(x) = x + \alpha$, pour tout $x \in S$.
Si $\beta$ est un réel non nul, on note $H_\beta$ l'application de $S$ dans $S$ définie par $H_\beta(x) = \beta x$, pour tout $x \in S$.
Enfin, on note $I$ l'application de $S$ dans $S$ définie par $I(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in S$.

**7°)** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$, les applications $T_\alpha$, $H_\beta$ et $I$ sont des homographies.

**8°)** Soit $a, b, c, d$ quatre réels tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$. On note $h$ l'homographie définie à partir de $a, b, c, d$ selon les formules de la fin de la partie I.
Montrer qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que,
pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $h(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+\gamma}$.

**9°)** Montrer que $h$ est une homographie si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta \neq 0$ tels que $h = T_\alpha \circ H_\beta \circ I \circ T_\gamma$ ou bien $h = T_\alpha \circ H_\beta$.

**10°)** Soit $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ quatre réels tels que $\beta \neq 0$ et $\beta' \neq 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha'', \beta'' \in \mathbb{R}$ avec $\beta'' \neq 0$ tels que $T_\alpha \circ H_\beta \circ T_{\alpha'} \circ H_{\beta'} = T_{\alpha''} \circ H_{\beta''}$.

**11°)** Si $\delta \in \mathbb{R}^*$, montrer que $I \circ T_\delta \circ I = T_{\frac{1}{\delta}} \circ H_{-\frac{1}{\delta^2}} \circ I \circ T_{\frac{1}{\delta}}$.

**12°)** En déduire que la composée de deux homographies est une homographie.

## Partie III : suites récurrentes homographiques avec un unique point fixe

Lorsque $h$ est une homographie, on dit que $\ell$ est un point fixe de $h$ si et seulement si $\ell \in S$ et $h(\ell) = \ell$.

**13°)** Pour cette question uniquement, on suppose que $h$ est l'homographie définie par :
— pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $h(x) = \dfrac{3x-2}{2x-1}$,
— $h(\frac{1}{2}) = \infty$ et $h(\infty) = \frac{3}{2}$.
**a)** Montrer que 1 est l'unique point fixe de $h$.

On pose $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_{n+1} = h(v_n)$.
On définit ainsi une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S$.

**b)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in \mathbb{R}$ et que $v_n > 1$.

**c)** Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{v_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

**d)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $v_n$ en fonction de $n$.

On souhaite dans cette partie montrer que cette méthode de calcul de $v_n$ se généralise.
Pour toute la suite de cette partie, on suppose que $h$ est une homographie possédant un unique point fixe $\ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$.

**14°)** Soit $f$ une application de $S$ dans $S$. Montrer que $f$ est une homographie admettant $\infty$ comme seul point fixe si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = T_\alpha$.

**15°)** Montrer qu'il existe une homographie $g$ et $c \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $x \in S$, $h(g(x)) = g(x + c)$.

**16°)** Soit $u_0 \in S$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S$ en convenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
Dans le cas où $\dfrac{1}{c(\ell - u_0)} \in S \setminus \mathbb{N}$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$, $u_0$, $\ell$ et $c$.

## Partie IV : suites récurrentes homographiques avec deux points fixes

**17°)** Pour cette question uniquement, on suppose que $h$ est l'homographie définie par :
— pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, $h(x) = \dfrac{x}{3-2x}$,
— $h(\frac{3}{2}) = \infty$ et $h(\infty) = -\frac{1}{2}$.
**a)** Calculer les points fixes de $h$.

On pose $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_{n+1} = h(v_n)$.
On définit ainsi une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $S$.

**b)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in \mathbb{R}$ et que $v_n < 0$.

**c)** Montrer que la suite $\left(\dfrac{v_n}{v_n - 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

**d)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $v_n$ en fonction de $n$.

On souhaite dans cette partie montrer que cette méthode de calcul de $v_n$ se généralise. Pour toute la suite de cette partie, on suppose que $h$ est une homographie possédant exactement deux points fixes distincts notés $\ell$ et $\ell'$, avec $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

**18°)** Soit $f$ une application de $S$ dans $S$. Montrer que $f$ est une homographie dont l'ensemble des points fixes est $\{0, \infty\}$ si et seulement si il existe $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ tel que $f = H_\beta$.

**19°)** Soit $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\ell'\}$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $S$ en convenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n - \ell}{u_n - \ell'}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bien définie de réels et montrer qu'elle est géométrique.

## Partie V : homographies laissant le cercle unité invariant

Dans cette partie, on dit que $h$ est une homographie **complexe** si et seulement si il existe quatre **complexes** $a, b, c, d$, avec $c \neq 0$ tels que $h$ est l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation : $h(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.

On fixe quatre complexes $a, b, c, d$, avec $c \neq 0$ et on note $f$ l'homographie complexe définie par ces 4 complexes.
On note $\mathbb{U}$ le cercle unité de $\mathbb{C}$ : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$.

**20°)** À quelle condition, portant sur $a, b, c, d$, $f$ est-elle définie pour tout $z \in \mathbb{U}$ ?

Pour toute la suite, on suppose que cette condition est vraie.
On note $f(\mathbb{U}) = \{f(z) \ / \ z \in \mathbb{U}\}$.

**21°)** Montrer que $f(\mathbb{U})$ est inclus dans $\mathbb{U}$ si et seulement si
$|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$.

**22°)** Si $f(\mathbb{U})$ est inclus dans $\mathbb{U}$, montrer que $(|c|, |d|)$ est égal à $(|a|, |b|)$ ou à $(|b|, |a|)$.

**23°)** Soit $h$ une homographie complexe. Montrer que $h(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ si et seulement si il existe deux complexes $a, b$ tels que $b \neq 0$ et $|a| \neq |b|$ et s'il existe un réel $\alpha$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\}$, $h(z) = e^{i\alpha} \dfrac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}$.