# DM 3

Dans tout le sujet, $I$ désigne un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments.

## Partie I : fonctions convexes

On admettra que, parce que $I$ est un intervalle, pour tout $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in I$.

Lorsque $f$ est une application de $I$ dans $\mathbb{R}$, on rappelle que $f$ est une dite convexe sur $I$ si et seulement si, pour tout $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$. On rappelle également que lorsque $f$ est dérivable sur $I$, $f$ est convexe sur $I$ si et seulement si sa dérivée $f'$ est croissante sur $I$.

**1°)** Montrer que l'application exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

**2°)** Soit $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a$ et $b$ deux réels.
On suppose que $f$ et $g$ sont convexes sur $I$ et que $a$ et $b$ sont positifs.
Montrer que $af + bg$ est convexe sur $I$.

**3°)** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $\varphi$ une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [a,b]$, $\varphi(t) \geq 0$.
Pour tout $x \in I$ et $t \in [a,b]$, $f(x,t)$ désigne un réel. On suppose que,
- pour tout $t \in [a,b]$, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est convexe sur $I$ ;
- pour tout $x \in I$, l'application $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.

Montrer que l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\varphi(t)\, dt$ est bien définie et qu'elle est convexe sur $I$.

**4°)** Soit $f$ une application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose de classe $C^2$.
On suppose également que $f$ est convexe sur $[0, 2\pi]$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\, dt \geq 0$ (on pourra intégrer par parties).

**5°)** Soit $f$ une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est deux fois dérivable sur $[-1,1]$ et que, pour tout $x \in [-1,1]$, $2f'(x) + xf''(x) \geq 1$.
Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\, dx \geq \frac{1}{3}$.

**6°) a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$,
pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$.

**6°) b)** Soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\displaystyle f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. (inégalité de Jensen).

**7°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ $n$ réels positifs ou nuls. On appelle moyenne arithmétique de $x_1, \ldots, x_n$ la quantité $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et moyenne géométrique la quantité $\displaystyle\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique (il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique).

**8°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle 1 + \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^{n}[(1 + x_k)^{\frac{1}{n}}]$.

## Partie 2 : fonctions log-convexes

Lorsque $f$ est une application de $I$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on dit que $f$ est log-convexe sur $I$ si et seulement si $\ln \circ f$ est convexe.

**9°)** Montrer que l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

**10°)** Montrer que si $f$ est log-convexe sur $I$ , alors elle est convexe sur $I$.
La réciproque est-elle vraie ?

**11°)** On suppose que $f$ est une application deux fois dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les dérivées de $f$ pour que $f$ soit log-convexe.

Soit $f$ et $g$ deux applications de $I$ dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on suppose log-convexes.

**12°)** Montrer que $fg$ est log-convexe.

**13°)** Déduire de la question 11 que, lorsque $f$ et $g$ sont deux fois dérivables, alors $f + g$ est log-convexe.

On suppose à nouveau que $f$ est une application quelconque de $I$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

**14°)** Montrer que $f$ est log-convexe sur $I$ si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto e^{ax} f(x)$ est convexe sur $I$.

**15°)** Démontrer le résultat de la question 13 sans supposer que $f$ et $g$ sont deux fois dérivables.

**16°)** Soit $J$ un second intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments.
Soit $g$ une application de $I$ dans $J$ que l'on suppose convexe et $h$ une application de $J$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose convexe et croissante.
Montrer que $h \circ g$ est convexe.
Plus généralement, la composée de deux applications convexes est-elle toujours convexe ?

**17°)** Montrer que $f$ est log-convexe sur $I$ si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, $x \longmapsto f(x)^\alpha$ est convexe.

## Partie III : Inégalité de Hölder

On fixe un réel $p$ dans $]1, +\infty[$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**18°)** Montrer qu'il existe un unique réel $q$ non nul tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}) \geq \frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
On note $E$ l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

**19°)** Soit $f$ et $g$ deux éléments de $E$.

**a)** Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(t)|^p\, dt + \frac{1}{q} \int_a^b |g(t)|^q\, dt$.

**b)** En déduire l'inégalité de Hölder : $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leq \Big( \int_a^b |f(t)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \times \Big( \int_a^b |g(t)|^q \Big)^{\frac{1}{q}}$.

**20°)** Pour tout $f \in E$, on note $\displaystyle\|f\|_p = \Big( \int_a^b |f(t)|^p\, dt \Big)^{\frac{1}{p}}$.
Montrer que, pour tout $f, g \in E$, $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (inégalité triangulaire).

**21°)** On suppose maintenant que $p$ et $q$ sont deux réels strictement positifs quelconques et on note $r$ l'unique réel strictement positif tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Montrer que, pour tout $f, g \in E$, $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

**22°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_n$ $n$ réels strictement posititfs. On note $r$ l'unique réel strictement positif tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$.

Montrer que, pour tout $f_1, \ldots, f_n \in E$, $\displaystyle\Big\| \prod_{k=1}^{n} f_k \Big\|_r \leq \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}$.