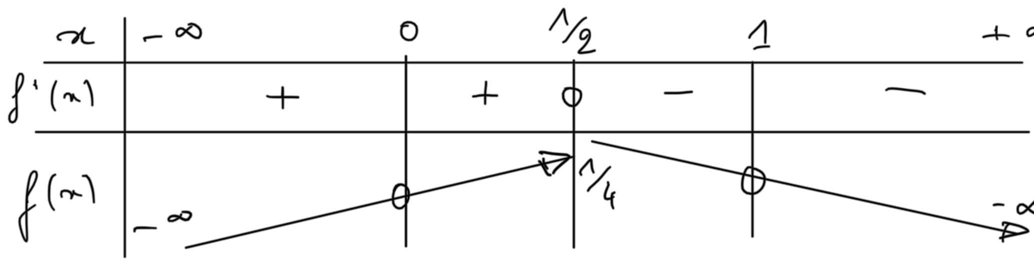
DM 1 : un corrigé

Partie I : un premier exemple

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - 2x$, donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \leq \frac{1}{2}$.
De plus, $f(x) = x^2(-1 + \frac{1}{x})$ lorsque $x \neq 0$, donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
On peut ainsi donner le tableau de variation de f :



2°) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors $x_n - x_n^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell^2$ et $x_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc x_{n+1} tend vers ℓ et vers $\ell - \ell^2$. D'après le principe d'unicité de la limite, $\ell = \ell - \ell^2$. Ainsi, $-\ell^2 = 0$, puis $\ell = 0$.

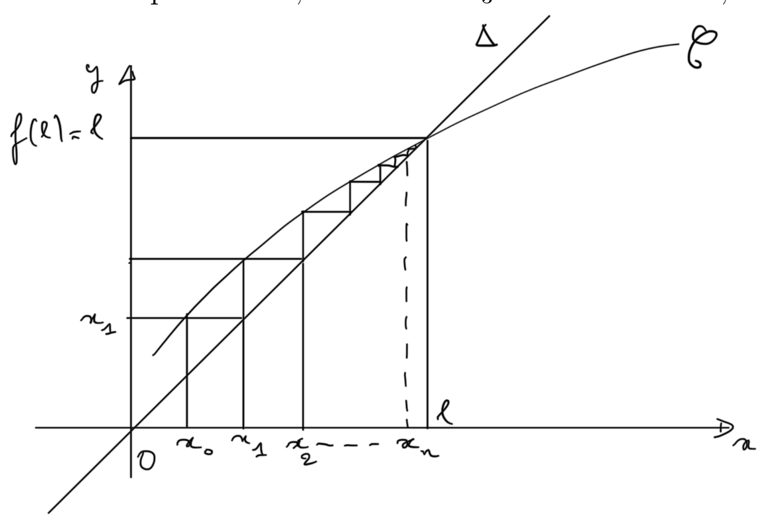
3°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
On dispose de $R(0)$ d'après les hypothèses de l'énoncé.
Supposons $R(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{n+1} = f(x_n) \in f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$, d'après le tableau de variation de f, donc $R(n+1)$ est vrai.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2 \leq x_n$, donc la suite (x_n) est une suite minorée (par 0) et décroissante. Elle converge donc vers un réel ℓ. Alors, d'après la question précédente, on peut affirmer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°) En adaptant les raisonnements de la question précédente, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < 0$ et que la suite (x_n) est décroissante. Si la suite était minorée, elle convergerait vers un réel ℓ tel que $\ell \leq x_0 < 0$, ce qui n'est pas possible d'après la question 2, donc (x_n) est une suite décroissante non minorée. On sait alors que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Partie II : Un peu de théorie

5°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D$ si et seulement si $x \geq 0$ et $1 - \sqrt{x} \neq 0$, donc $D = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.
Si $x_0 > 1$, alors $\sqrt{x_0} > 1$, donc $x_1 < 0$. Alors $x_1 \notin D$ et x_2 n'est pas défini.
Si $x_0 \in]0,1[$, alors $0 < 1 - \sqrt{x_0} < 1$, donc $x_1 = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x_0}} > 1$. Alors, comme précédemment, on en déduit que $x_2 < 0$, donc x_3 n'est pas défini.
Enfin, si $x_0 = 0$, alors $x_1 = 1$ et x_2 n'est pas défini.
En conclusion, la suite (x_n) n'est jamais défnie, quelle que soit la valeur de x_0.

6°) $\diamond$ $x_1 = f(x_0)$, donc x_1 est bien l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0. Ceci explique la présence de x_1 sur l'axe Oy. Ensuite, la droite horizontale de hauteur x_1 rencontre la droite Δ en un point d'ordonnée x_1 et d'abscisse égale à x_1, car Δ est la droite d'équation $y = x$. Ceci explique la présence de x_1 sur l'axe Ox.
$\diamond$ On passe de x_1 sur l'axe Ox à x_2 sur l'axe Ox, en remplaçant x_0 par x_1 dans la construction précédente, cf figure ci-dessous. Ensuite, en remplaçant x_0 par x_2 dans la construction précédente, on obtient x_3 et ainsi de suite, comme indiqué sur la figure.



$\diamond$ Sur la figure ainsi construite, on observe que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite ℓ telle que $f(\ell) = \ell$.

7°) $\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion suivante : x_n est bien définie et $x_n \in D$. On dispose de $R(0)$ par hypothèses.
Supposons $R(n)$, où $n \in \mathbb{N}$. D'après $R(n)$, $x_n \in D$, donc $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie. De plus $f(D) \subset D$, donc $x_{n+1} = f(x_n) \in D$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, la suite (x_n) est définie.
$\diamond$ Supposons que $x_0 \leq x_1$. Alors on peut montrer par récurrence que $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, si $x_n \leq x_{n+1}$, par croissance de f sur D, on en déduit que $x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_{n+1}) = x_{n+2}$.
Ainsi, lorsque $x_0 \leq x_1$, la suite (x_n) est croissante.
De même, lorsque $x_0 \geq x_1$, on montre que la suite (x_n) est décroissante.

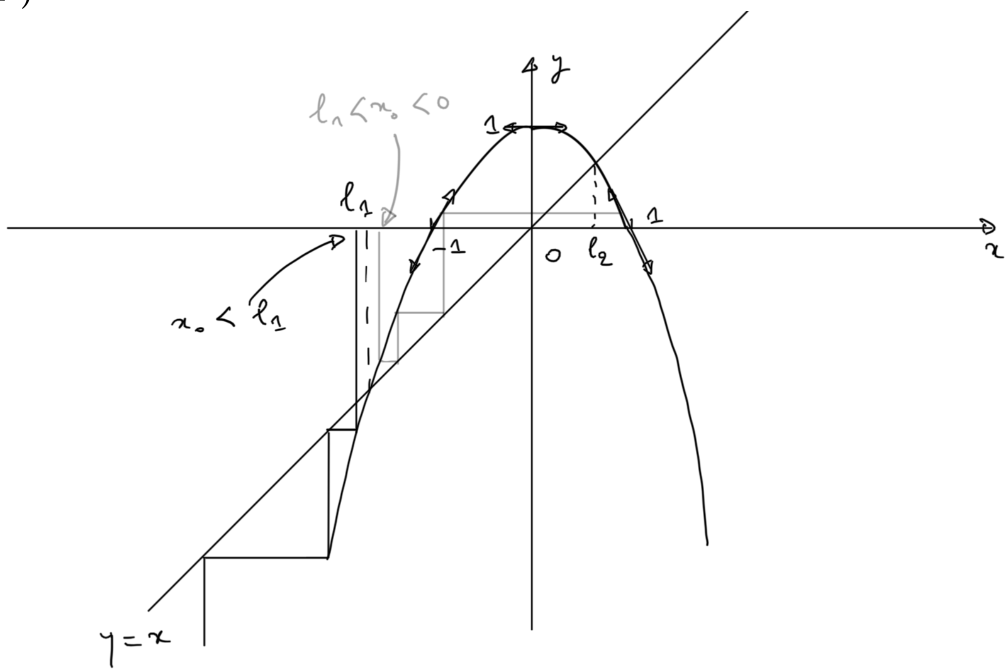
8°) Comme pour la question précédente, on a encore que la suite (x_n) est bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} = (f \circ f)(x_{2n})$, donc la suite (x_{2n}) vérifie une relation de récurrence d'ordre 1, associée à la fonction $f \circ f$. On a $(f \circ f)(D) \subset D$ et $f \circ f$ est croissante, donc d'après la question précédente, lorsque $x_0 \leq x_2$, la suite (x_{2n}) est croissante et lorsque $x_0 \geq x_2$, elle est décroissante.
De même, $x_{2(n+1)+1} = (f \circ f)(x_{2n+1})$, donc la suite (x_{2n+1}) est monotone. Lorsque $x_0 \leq x_2$, en composant par f, qui est décroissante, $x_1 \geq x_3$, donc la suite (x_{2n+1}) décroît et lorsque $x_0 \geq x_2$, la suite (x_{2n+1}) est croissante. Dans tous les cas, on a bien montré que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires.

9°) Supposons que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, où $\ell \in D$. f étant continue sur D, $x_{n+1} = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$, mais d'autre part, $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.

10°) $\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = 0$. Le discriminant de cette équation de degré 2 est égal à $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc les points fixes de f sont $\ell_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
$\ell_1 < -1 \iff 1 + \sqrt{5} > 2 \iff 5 > 1$, ce qui est vrai et $\ell_2 < 1 \iff \sqrt{5} < 3 \iff 5 < 9$, ce qui est vrai, donc $\ell_1 < -1$ et $\ell_2 \in]0, 1[$.
$\diamond$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x$.
On en déduit le tableau de variation ci-dessous.
$\diamond$ $f(x) - x = -x^2 - x + 1$. C'est un polynôme de degré 2 dont les racines sont ℓ_1 et ℓ_2. On en déduit le signe de $f(x) - x$, comme indiqué dans le tableau de variation.
$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $(f \circ f)(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$, donc
$(f \circ f)(x) - x = -x(1 + x(x^2 - 2)) = -x(x^3 - 2x + 1)$. On remarque que 1 est racine de $x^3 - 2x + 1$. On en déduit que $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + ax - 1)$, où, en égalant les termes de degré 2 : $0 = -1 + a$. Ainsi, $(f \circ f)(x) - x = x(1 - x)(x^2 + x - 1)$. On en déduit ainsi son signe, comme indiqué dans le tableau de variation.

x	$-\infty$		ℓ_1		-1		0		ℓ_2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	ℓ_1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	ℓ_2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f\circ f(x)-x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

11°)



Sur la figure ci-dessus, on a tracé la droite d'équation $y = x$, le graphe de f et on a construit les premiers termes de la suite (x_n) lorsque $x_0 < \ell_1$ et lorsque $\ell_1 < x_0 < 0$.

◇ Lorsque $x_0 < \ell_1$, la figure permet de conjecturer que la suite (x_n) décroît et tend vers $-\infty$. Démontrons déjà ce résultat : d'après le tableau de variation, en posant $D =]-\infty, \ell_1[$, on a $f(D) \subset D$ et f est croissante sur D. D'après la question 7, la suite (x_n) est monotone. De plus, d'après le tableau de variation, avec $x_0 \in D$, $f(x_0) - x_0$ est négatif, donc $x_1 \leq x_0$. Ainsi, la suite (x_n) est décroissante. Si elle était minorée, elle convergerait vers $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$, donc elle convergerait vers ℓ_1 ou vers ℓ_2. C'est impossible car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_0 < \ell_1 < \ell_2$. Ainsi, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, en décroissant.

◇ Lorsque $x_0 = \ell_1$, ou lorsque $x_0 = \ell_2$, la suite est constante.

◇ Lorsque $\ell_1 < x_0 < 0$, la figure permet de conjecturer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $x_n \in [0, 1]$. En effet, supposons par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin [0, 1]$. Alors d'après le tableau de variation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]\ell_1, 0[$. Or, comme $x_0 \in]\ell_1, 0[$, toujours d'après le tableau de variation, $x_1 \geq x_0$. f étant croissante sur $]\ell_1, 0[$, on montre par récurrence que la suite (x_n) est croissante. Elle est majorée par 0, donc elle converge vers $\ell \in \{\ell_1, \ell_2\}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell_1 < x_0 \leq x_n \leq 0$, donc en passant à la limite, $\ell_1 < x_0 \leq \ell \leq 0$, ce qui est impossible.

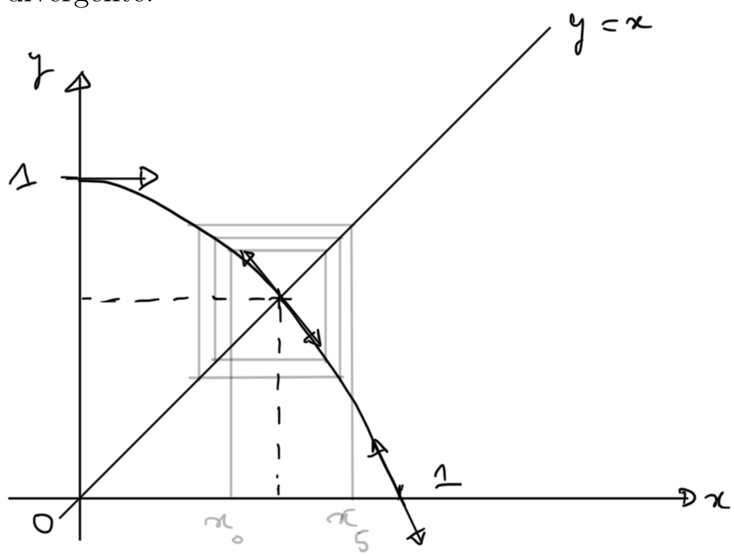
Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \in [0, 1]$. Or $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, donc, pour tout $n \geq N$, $x_n \in [0, 1]$. Alors en remplaçant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(x_{n+N})_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui revient à faire commencer la suite par x_N, on est ramené au cas suivant.

◇ On suppose maintenant que $x_0 \in [0, 1]$.

Si $x_0 = \ell_2$, alors la suite est constante égale à ℓ_2, donc elle converge vers ℓ_2.

Pour la suite, on suppose que $x_0 \neq \ell_2$.

On a $f([0,\ell_2]) = [\ell_2, 1]$ et $f([\ell_2, 1]) = [0, \ell_2]$, donc les valeurs de la suite (x_n) sont alternativement dans $[0, \ell_2]$ et dans $[\ell_2, 1]$, selon la parité de n. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 \in [0, \ell_2[$.
Alors la figure suivante permet de conjecturer que la suite (x_{2n}) converge vers 0 en décroissant et que la suite (x_{2n+1}) converge vers 1 en croissant. En particulier, la suite (x_n) est divergente.



Démontrons ce résultat : on a $f([0,1]) = [0,1]$ et f est décroissante sur $[0,1]$, donc d'après la question 8, les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones de sens contraire. De plus $x_0 \in [0, \ell_2[$, donc d'après le tableau de variation $(f \circ f)(x_0) - x_0 \leq 0$. Ainsi $x_2 \leq x_0$. Ceci prouve que (x_{2n}) est une suite décroissante d'éléments de $[0, \ell_2[$ et que (x_{2n+1}) est une suite croissante d'éléments de $]\ell_2, 1]$. Ces suites étant bornées et monotones, elles sont convergentes. Ainsi, il existe $\ell \in [0, \ell_2[$ tel que $x_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, mais d'après la question 9, par continuité de $f \circ f$, on a $(f \circ f)(\ell) = \ell$, donc d'après la question précédente, $\ell \in \{\ell_1, \ell_2, 0, 1\}$. On a donc nécessairement que $\ell = 0$, ce qui prouve que $x_{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. De même on montre que $x_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Partie III : Point fixe attractif ou répulsif

12°) $\diamond$ Pour tout $t \in [a,b]$, $g(t) \geq 0$, donc $f(\alpha)g(t) \leq f(t)g(t) \leq f(\beta)g(t)$, puis par croissance de l'intégrale, $f(\alpha) \displaystyle\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\, dt \leq f(\beta) \int_a^b g(t)\, dt$.

$\diamond$ Si $\displaystyle\int_a^b g(t) = 0$, alors cet encadrement implique que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, dt = 0 = f(c) \int_a^b g(t)\, dt$ quel que soit $c \in [a,b]$.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt \neq 0$, alors cette intégrale est strictement positive, donc l'encadrement peut s'écrire $f(\alpha) \leq \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\ dt}{\int_a^b g(t)\ dt} \leq f(\beta)$ et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

13°) $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\ dt$. D'après la question précédente dans laquelle on remplace (f, g) par $(f', 1)$ (on a bien f' continue et la fonction constante égale à 1 est continue et positive), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)\displaystyle\int_a^b dt = f'(c)(b-a)$.

14°) Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = f(x) - x$. g est continue,
$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $g(\ell) = 0$. Alors $f(\ell) = \ell$ et ℓ est donc un point fixe de f.

15°) Notons $J =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
$\diamond$ En question 13, si $a > b$, on remplace le couple (a, b) par (b, a) et on en déduit encore qu'il existe $c \in [b, a]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. De plus cette affirmation est évidente lorsque $a = b$. Ainsi, avec les notations de la question actuelle, pour tout $\alpha, \beta \in [a, b]$, il existe γ entre α et β tel que $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta - \alpha)$.
Soit $y \in J$. Il existe donc $c \in J$ tel que $f(y) - \ell = f(y) - f(\ell) = f'(c)(y - \ell)$. On en déduit que $|f(y) - \ell| \leq k|y - \ell| \leq |y - \ell| < \varepsilon$, donc $f(y) \in J$. Ainsi, on a montré que $f(]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
$\diamond$ Supposons maintenant que $x_0 \in J$.
Alors d'après la question 9, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in J$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en adaptant le raisonnement précédent,
$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \leq k|x_n - \ell|$. On en déduit alors par récurrence sur n que $|x_n - \ell| \leq k^n|x_0 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, or $k \in [0, 1[$, donc $k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors d'après le principe des gendarmes, $x_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

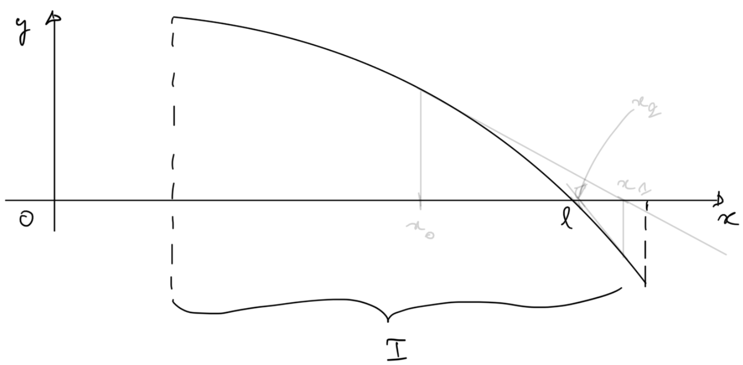
16°) Notons encore $J =]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et supposons que $x_0 \in J \setminus \{\ell\}$.
Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in J$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme lors de la question précédente, il existe $c_n \in J$ tel que
$|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| = |f'(c_n)||x_n - \ell|$, donc $|x_{n+1} - \ell| \geq k|x_n - \ell|$, puis par récurrence, $|x_n - \ell| \geq k^n|x_0 - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, car $x_0 \neq \ell$.
Ainsi, $|x_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$. C'est impossible.
Ceci démontre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \notin]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

17°) $\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$, donc $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Ainsi, en posant $I = [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$, $f(\mathbb{R}^*) \subset I$. En particulier, $f(I) \subset I$.
f est de classe C^1, donc d'après la question 14, appliquée avec $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{5}{4}$, f possède un point fixe dans I.

$\diamond$ Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{1}{4x^2} \cos \dfrac{1}{x}$, donc $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4 \times (\frac{3}{4})^2} = \dfrac{4}{9}$. Notons $k = \frac{4}{9}$.
Supposons que ℓ et ℓ' sont deux points fixes de f. Alors $\ell = f(\ell) \in f(\mathbb{R}^*) \subset I$ et de même $\ell' \in I$.
Ainsi, $\ell - \ell' = f(\ell) - f(\ell') = f'(c)(\ell - \ell')$, où $c \in I$. Alors $(\ell - \ell')(1 - f'(c)) = 0$, mais $|f'(c)| \leq \frac{4}{9}$, donc $f'(c) \neq 1$. Alors $\ell - \ell' = 0$, donc $\ell = \ell'$. Ceci prouve l'unicité du point fixe, que l'on notera ℓ.
$\diamond$ $x_1 = f(x_0) \in f(\mathbb{R}^*) \subset I$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in I$.
Le même raisonnement qu'en question 15 montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$|x_{n+1} - \ell| \leq k|x_n - \ell|$, donc par récurrence, $|x_n - \ell| \leq k^{n-1}|x_1 - \ell| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Partie IV : Méthode de Newton

18°) $\diamond$ Par intégration par parties,
$\displaystyle\int_a^b (b-t)f''(t)\,dt = [(b-t)f'(t)]_a^b - \int_a^b (-f'(t))\,dt = -(b-a)f'(a) + f(b) - f(a)$, d'où la relation de l'énoncé.
$\diamond$ Lorsque $a \leq b$, on en déduit alors par inégalité triangulaire que
$\displaystyle|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq \int_a^b (b-t)k\,dt = k\Big[-\frac{(b-t)^2}{2}\Big]_a^b = k\frac{(b-a)^2}{2}$.
Lorsque $a \geq b$, on adapte ce raisonnement :
$\displaystyle|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| = |\int_a^b (b-t)f''(t)\,dt| = \int_b^a (t-b)|f''(t)|\,dt \leq \int_b^a (t-b)k\,dt$,
donc $\displaystyle|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)| \leq \Big[\frac{(t-b)^2}{2}\Big]_b^a = \frac{(a-b)^2}{2}k$.
19°) $\diamond$ La tangente en x_n a pour équation $y - f(x_n) = (x - x_n) \times f'(x_n)$. Elle rencontre l'axe Ox lorsque $y = 0$ et $x = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, donc $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
$\diamond$ Supposons que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in I$. alors l'égalité précédente donne, compte tenu des continuités de f et f' en ℓ : $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$, donc $f(\ell) = 0$: les éventuelles limites de la suite (x_n) sont des zéros de f.
$\diamond$ La convergence très rapide vers un zéro de f de la suite (x_n) est illustrée par la figure suivante :



20°) $\diamond$ Posons $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Ainsi, $x_{n+1} = g(x_n)$.

$g'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)}{f'(x)} + \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

En particulier, $g(\ell) = \ell$ et $g'(\ell) = 0$.

Alors, d'après la question 15, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[) \subset]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ et, lorsque $x_0 \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$\diamond$ f étant de classe C^3, g est de classe C^2 sur $J = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Alors g'' est bornée sur cet intervalle. On peut donc poser $D = \frac{1}{2} \max\limits_{t \in J} |g''(t)|$.

Alors, d'après la question 18, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|x_{n+1} - \ell| = |g(x_n) - g(\ell) - (x_n - \ell)g'(\ell)| \leq D(x_n - \ell)^2$.

Si $D = 0$, $|x_n - \ell| = 0$ pour $n \geq 1$ et on a fini. On suppose maintenant que $D > 0$.

Ainsi, $D|x_{n+1} - \ell| \leq (D(x_n - \ell))^2$, puis par récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D|x_n - \ell| \leq |(D(x_0 - \ell)|^{(2^n)}$.

Posons $\alpha = \min(\varepsilon, \dfrac{1}{10D})$ et supposons que $x_0 \in]\ell - \alpha, \ell + \alpha[$.

Alors $|D(x_0 - \ell)| \leq \dfrac{1}{10}$, donc $|x_n - \ell| \leq \dfrac{1}{D} 10^{-(2^n)}$, ce qui conclut.

$\diamond$ La convergence est quadratique. Le nombre de décimales significatives de x_n en tant qu'approximation de ℓ double lorsque l'on remplace n par $n + 1$. Plus précisément, si $|Dx_n - D\ell| \leq \frac{1}{2}10^N$, alors la valeur appochée de Dx_n en ne retenant que ses N premières décimales approche $D\ell$ à 10^{-N} près. Dans ce cas, $|Dx_{n+1} - D\ell| \leq \frac{1}{2}10^{2N}$, donc on est passé de N décimales à $2N$.