Feuille d'exercices 1.
Corrigé de l'exercice supplémentaire 31

Exercice 1.31 :

1°) *Première méthode : par l'absurde.* On suppose que pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq i < j \leq n$, $|x_i - x_j| > \frac{1}{n}$.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \leq x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_{n+1} \leq 1$.
Alors $1 \geq x_{n+1} - x_1 = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) > 1$, ce qui est faux.
Seconde méthode : on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en les n sous-intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, où k varie entre 0 et $n-1$, que l'on assimile à n tiroirs dans lesquels on place les $n+1$ réels $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Alors, d'après le principe des tiroirs, l'un de ces sous-intervalles contient au moins deux de ces réels. Si on note x_i et x_j ces derniers, on a bien $i \neq j$ et $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

2°) Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\ell \in \{0, \ldots, M\}$, $x_\ell = \ell x - \lfloor \ell x \rfloor \in [0, 1[$, donc il existe $i, j \in \{0, \ldots, M\}$ tels que $i < j$ et $|x_j - x_i| \leq \frac{1}{M}$.
Mais $x_j - x_i = qx - p$, où $q = j - i \in \{1, \ldots, M\}$ et $p \in \mathbb{Z}$.
On a $p = qx + x_i - x_j > x_i - x_j \geq -1$, donc $p \in \mathbb{N}$.
Ainsi, $|qx - p| \leq \frac{1}{M} \leq \frac{1}{q}$ car $M \geq q$, puis $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$: il reste à choisir M suffisamment grand pour que l'inégalité $|qx - p| \leq \frac{1}{M}$ implique $q \geq N$:
Lorsque $h \in \{1, \ldots, N\}$, les entiers les plus proches de hx sont $\lfloor hx \rfloor$ et $\lfloor hx \rfloor + 1$. Ainsi, si l'on pose $\alpha_h = \min\{hx - \lfloor hx \rfloor, \lfloor hx \rfloor + 1 - hx\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|hx - k| \geq \alpha_h$.
Notons $\alpha = \dfrac{1}{2} \min_{h \in \{1,\ldots,N\}} \alpha_h$. $\alpha > 0$ car x n'est pas rationnel.
Ainsi, pour tout $h \in \{1, \ldots, N\}$ et $k \in \mathbb{N}$, $|hx - k| > \alpha$.
Choisissons $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $M \geq \frac{1}{\alpha}$. Alors, lorsque $|qx - p| \leq \frac{1}{M}$,
$|qx - p| \leq \alpha$, donc $q \geq N$.

3°) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la quantité conjuguée,
$|q\sqrt{2} - p| = \dfrac{|2q^2 - p^2|}{q\sqrt{2} + p} \geq \dfrac{1}{q\sqrt{2} + p}$, car $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Si $p \leq 2q$, alors $|q\sqrt{2} - p|| \geq \dfrac{1}{q(\sqrt{2} + 2)}$, puis $|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}| \geq \dfrac{1}{q^2(\sqrt{2} + 2)}$

Si $p > 2q$, alors $\frac{p}{q} > 2$, donc $|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}| = \dfrac{p}{q} - \sqrt{2} \geq 2 - \sqrt{2} \geq \dfrac{2-\sqrt{2}}{q^2} = \dfrac{2}{q^2(\sqrt{2}+2)}$.
En posant $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$, on a bien montré ce qu'il fallait, dans tous les cas.