

Résumé de cours :  
Semaine 2, du lundi 9 au samedi 14 septembre.

## 1 Trigonométrie (suite)

### 1.1 Formulaire de trigonométrie (suite)

**Il faut savoir établir chacune de ces formules.**

**Formule d'addition :**

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \text{ et } \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \text{ et } \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

**Formules de duplication :**  $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ ,

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a \text{ et } \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

**Premières formules de linéarisation :**

$$\cos^2 a = \frac{\cos(2a) + 1}{2} \text{ et } \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \geq 0.$$

$$2 \cos a \cdot \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b),$$

$$2 \sin a \cdot \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b),$$

$$2 \sin a \cdot \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b).$$

**Formules de factorisation :**

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

**Il faut savoir les retrouver en utilisant les complexes.**

**Formules (hors programme) :** en posant  $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , on a

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \tan \theta = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

**Propriété.** Lignes trigonométriques à connaître :

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

La croissance de la fonction tangente sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  aide à retenir la dernière ligne.

## 1.2 Equations trigonométriques

**1.2.1 Résolution du système (S) :**  $(\cos x = c) \wedge (\sin x = s)$

**1.2.2 Résolution de l'équation**  $\cos x = c$

**Définition.** L'application  $\cos$  réalise une bijection (décroissante) de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ . On note  $\arccos$  l'application réciproque.

**Propriété.** Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v [2\pi]$ .

**Il faut savoir résoudre les équations suivantes :**  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$ .

**1.2.3 Résolution de l'équation**  $\sin x = s$

**Définition.** L'application  $\sin$  réalise une bijection (croissante) de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dans  $[-1, 1]$ . On note  $\arcsin$  l'application réciproque.

**Propriété.** Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $\sin u = \sin v \iff (u \equiv v [2\pi]) \vee (u \equiv \pi - v [2\pi])$ .

**1.2.4 Résolution de l'équation**  $\tan x = t$

**Définition.**  $\tan$  est une bijection (croissante) de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\arctan$  l'application réciproque.

**Corollaire.** Pour tout  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $\tan u = \tan v \iff u \equiv v [\pi]$ .

**1.2.5 Expressions de la forme**  $A \cos x + B \sin x$ .

**Technique à connaître :** transformation de  $A \cos x + B \sin x$  en  $r \cos(x - \varphi)$ .

*Première méthode :*

Soit  $(A, B) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ .

$$A \cos x + B \sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x \right).$$

Posons  $c = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  et  $s = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . On a  $c^2 + s^2 = 1$ , donc on sait qu'il existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que

$$c = \cos \varphi \text{ et } s = \sin \varphi. \text{ Ainsi, en posant } r = \sqrt{A^2 + B^2},$$

$$A \cos x + B \sin x = r(\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) = r \cos(x - \varphi).$$

$r$  est appelé l'amplitude et  $\varphi$  la phase.

On remarquera que, par construction,  $c + is = e^{i\varphi}$ , donc  $A + iB = re^{i\varphi}$ .

*Seconde méthode :* lorsque  $A \neq 0$ . Il existe  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = \frac{B}{A}$ .

$$\text{Alors } A \cos x + B \sin x = A \left( \cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x \right) = \frac{A}{\cos \varphi} \cos(x - \varphi).$$

**Sachez résoudre les équations suivantes :**

$$-3 \cos x + 4 \sin x = 10 \text{ et } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2.$$

## 2 Dérivation et intégration

### 2.1 Pente de la tangente

**Propriété.** Pour une droite d'équation  $y = px + y_0$ , on dit que  $p$  est sa pente.

On dispose également des droites "verticales", d'équation  $x = x_0$ , où  $x_0 \in \mathbb{R}$ , qui sont de pente infinie. Deux droites affines du plan sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

**Propriété.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Pour tout  $x_0, x_1 \in \mathcal{D}_f$ , avec  $x_0 \neq x_1$ , la corde du graphe de  $f$  entre les abscisses  $x_0$  et  $x_1$  est par définition l'unique droite du plan passant par les points du graphe de  $f$  d'abscisses  $x_0$  et  $x_1$ .

Elle a pour équation :  $y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \times (x - x_0)$ .

En particulier, la pente de cette droite est égale à  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ .

**Définition.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $x_0 \in I$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si la quantité  $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  possède une limite lorsque  $x_1$  tend vers  $x_0$ . Dans ce cas, cette limite est notée  $f'(x_0)$  et est appelée la dérivée de  $f$  en  $x_0$ .

Informellement, lorsque  $f$  est dérivable en  $x_0$ , la corde du graphe de  $f$  entre les abscisses  $x_0$  et  $x_1$  tend vers la tangente en  $x_0$ , d'équation :  $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

Cela dit que la meilleure approximation de  $f$ , au voisinage de  $x_0$ , parmi l'ensemble des applications affines, est  $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ .

Il faut retenir que  $f'(x_0)$ , lorsqu'elle est définie, est la pente de la tangente au graphe de  $f$  en le point d'abscisse  $x_0$ .

**Définition.** On dit que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  si et seulement si elle est dérivable en chacun des réels de  $I$ . On dispose alors de l'application  $f'$ , définie au moins sur  $I$ .

On dit alors que  $f$  est de classe  $D^1$ .

Lorsque  $f'$  est continue sur  $I$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ .

**Définition.** Si  $f'$  est définie sur un intervalle  $I$ , on dit que  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  lorsque  $f'$  est dérivable en tout point de  $I$ . La dérivée de la dérivée de  $f$  est notée  $f''$ . On l'appelle la dérivée seconde de  $f$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par récurrence, la dérivée  $n$ -ième de  $f$  lorsqu'elle est définie est la dérivée de la dérivée  $(n-1)$ -ième. On la note  $f^{(n)}$ . On dit alors que  $f$  est de classe  $D^n$  sur  $I$ .

On dit que  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I$  lorsque  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et que  $f^{(n)}$  est continue.

On dit que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  lorsque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est  $C^n$  sur  $I$ .

**Remarque.** On convient que  $f^{(0)} = f$ , pour toute application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Règles de dérivation

### Règles générales **A savoir utiliser dans des calculs sans hésiter**

- Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ .
- $(fg)' = f'g + fg'$ .
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ .
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ .
- $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$ .
- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$ .
- Lorsque  $f$  est bijective,  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies.

### Dérivées des fonctions usuelles **A connaître par coeur**

$$\text{— } \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}, \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- $\cos' = -\sin$ ,  $\sin' = \cos$ .
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ .
- $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ .
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ,  $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$  (où  $a > 0$ ),  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

## Dérivées d'ordre supérieur

- Si  $f$  est  $n$  fois dérivable,  $\frac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) = a^n f^{(n)}(ax+b)$ .
- $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$  et  $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ .
- $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ .

## 2.3 Dérivation et monotonie

**Théorème.** Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $I$  est un **intervalle** de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$ .

- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est identiquement nulle sur  $I$ .
- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$ .
- Si  $f'(x)$  est de signe constant sur  $I$  et si  $\{x \in I / f'(x) = 0\}$  est fini, alors  $f$  est strictement monotone.

**Il faut savoir redémontrer les propriétés suivantes. Il faut aussi les connaître pour les utiliser éventuellement sans démonstration.**

- pour tout  $x > 0$ ,  $\sin x < x$ .
- Pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \operatorname{sgn}(t) \times \frac{\pi}{2}$ .

## 2.4 Intégration

**Définition.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. On note  $\int_a^b f(t)dt$  (prononcer "intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(t) dt$ ") l'aire comprise entre l'axe des abscisses (noté  $Ox$ ) et le graphe de  $f$ , en comptant positivement les aires au dessus de l'axe  $Ox$  (donc lorsque  $f(x) \geq 0$ ) et négativement les aires situées au dessous de l'axe  $Ox$  (lorsque  $f(x) \leq 0$ ).

**Convention :** Avec les notations et hypothèses précédentes, on convient que

$$\int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt \text{ et que } \int_a^a f(t)dt = 0.$$

**Propriété.** Soit  $I$  un intervalle inclus dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a, b \in I$  (on peut avoir  $a < b$ ,  $b < a$  ou bien  $a = b$ ).

- Linéarité : Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .
- Relation de Chasles : Pour tout  $c \in I$ ,  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$ .

Soit  $a, b \in I$  : **on suppose maintenant que  $a \leq b$ .**

- Positivité : si  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ .

- Croissance de l'intégrale : si  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ .
- Inégalité triangulaire :  $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$ .

**Propriété.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application **continue et positive**, telle que  $\int_a^b f(t)dt = 0$ . Alors  $f$  est identiquement nulle sur  $[a, b]$ .

**Inégalité de Cauchy-Schwarz :** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et soit  $f$  et  $g$  deux applications continues

de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$ ,

avec égalité si et seulement si  $f$  et  $g$  sont colinéaires,

c'est-à-dire si et seulement si  $f = 0$  ou bien il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $g(x) = \lambda f(x)$ .

**Il faut savoir le démontrer.**

## 2.5 Primitivation

**Définition.** Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si et seulement si  $F$  est dérivable et  $F' = f$ .

**Propriété.** Avec les hypothèses et notations précédentes, si  $F_0$  est une primitive de  $f$ , alors les autres primitives de  $f$  sont exactement les applications  $F_0 + k$ , où  $k$  est une fonction constante.

**Théorème :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on suppose continue.

Soit  $x_0 \in I$ . Alors  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $x_0$ .

**Corollaire.** Soit  $f$  une application continue d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors pour tout  $a, b \in I$ ,  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \triangleq [F(t)]_a^b$ .

**Corollaire.** Si  $f$  est une application de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ .

**Notation.** L'écriture " $\int f(t)dt = F(t) + k, t \in I$ " signifiera que  $f$  est continue sur  $I$  et que l'ensemble des primitives de  $f$  est  $\{F + k/k \in \mathbb{R}\}$ .

**Il faut savoir calculer les primitives suivantes :**

$$\int \cos t dt, \int x^\alpha dx \text{ (où } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\text{)}, \int \cos^2 x dx, \int \frac{dx}{1+x^2} \text{ et } \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2}.$$

**Propriété.** Avec  $a \neq 0$ , si  $\int f(t)dt = F(t) + k$ , alors  $\int f(at+b)dt = \frac{1}{a}F(at+b) + k$ .

**Remarque.** Si  $f$  est une application continue d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et si  $u : J \rightarrow I$  et  $v : J \rightarrow I$

sont des applications dérivables sur un intervalle  $J$ , on calcule la dérivée de  $t \mapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$  en utilisant une primitive  $F$  de  $f$  :

$$\int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx = F(v(t)) - F(u(t)) \text{ a pour dérivée } v'(t)f(v(t)) - u'(t)f(u(t)).$$

### 3 Quelques théorèmes d'analyse

On montrera plus tard les théorèmes suivants :

**Théorème de la limite monotone** : On pose  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

Soit  $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$  avec  $m < M$ . Notons  $I = ]m, M[$ .

Soit  $f$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on suppose monotone.

Alors la quantité  $f(x)$  possède une limite dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , lorsque  $x$  tend vers  $m$  (resp :  $M$ ).

**Théorème.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et soit  $f$  une application continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est bornée et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire

qu'il existe  $\alpha, \beta \in [a, b]$  tel que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ .

**Notation.** Pour la suite de ce paragraphe, on fixe un intervalle  $I$  de cardinal infini.

**Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue à valeurs réelles. Soit  $a, b \in I$  avec  $a < b$ . Alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .

**Seconde formulation du TVI :**

L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

**Théorème.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

**Théorème de la bijection** : Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et strictement monotone. Alors  $f$  est une bijection de  $I$  dans  $f(I)$  et  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  est également **continue** et strictement monotone (de même sens de variation que  $f$ ).

**Définition.** Soit  $f : I \rightarrow J$  où  $I$  et  $J$  sont deux intervalles. Soit  $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . On dit que  $f$  est un  $C^n$ -difféomorphisme si et seulement si  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $J$  et si  $f$  et  $f^{-1}$  sont toutes deux de classe  $C^n$ .

**Caractérisation d'un difféomorphisme** : Soit  $f$  une application définie sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ .  $f$  est un  $C^n$ -difféomorphisme de  $I$  dans  $f(I)$  si et seulement si  $f$  est de classe  $C^n$  et si, pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) \neq 0$ .

## 4 Fonctions Logarithmes et puissances

### 4.1 Les fonctions ln et exp

**La fonction Logarithme népérien** : Pour tout  $x > 0$ , on pose  $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ .

ln est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ .  $\ln(1) = 0$ .

Pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$ .

Il existe un unique  $e \in \mathbb{R}$  tel que  $\ln(e) = 1$ .  $e$  est le nombre de Neper :  $e = 2,7 \pm 10^{-1}$ .

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,

—  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$  : **A savoir démontrer.**

—  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ ,  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ ,

—  $\ln(x^n) = n \ln x$ ,

—  $\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\infty$ ,  $\ln(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ,  $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  : **A savoir démontrer.**

**La fonction exponentielle :** c'est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.  $\exp$  est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exp(\ln x) = x$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln(\exp(x)) = x$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x)$ .

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,

- $e^{x+y} = e^x e^y$ ,
- $e^0 = 1$  et  $e^1 = e$ ,
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ,  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ,
- $e^{nx} = (e^x)^n$ .
- $e^t \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$ ,  $e^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .  $\frac{e^t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**Représentation graphique de  $\ln$  et  $\exp$  :** [A connaître](#)

**Logarithmes et exponentielles en base  $a$ .**

— Soit  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\ln_a(x) \triangleq \frac{\ln x}{\ln a}$ .

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+^*$  et  $b \in \mathbb{R}$ ,

- $\ln_a(xy) = \ln_a x + \ln_a y$ ,
- $\ln_a(1) = 0$  et  $\ln_a(a) = 1$ ,
- $\ln_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln_a x$ ,  $\ln_a\left(\frac{x}{y}\right) = \ln_a x - \ln_a y$ ,
- $\ln_a(x^b) = b \ln_a x$ ,
- Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $a^x \triangleq e^{x \ln a} = \exp_a(x)$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln_a(a^x) = x$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a^{\ln_a x} = x$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$ .

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

- $a^{x+y} = a^x a^y$ ,
- $a^0 = 1$  et  $a^1 = a$ ,  $a^x > 0$ ,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ,  $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ ,
- pour tout  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a^{bx} = (a^x)^b$ .
- Pour tout  $b > 0$ ,  $a^x b^x = (ab)^x$ .

## 4.2 Fonctions puissances

**Définition.** Un monôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  est une application de la forme  $x \mapsto ax^n$ , où  $a$  est un paramètre réel. Cette application est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Une fonction polynomiale est une somme finie de monômes.

Lorsque  $n \in \mathbb{Z}$  avec  $n < 0$ ,  $x \mapsto x^n$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

Représentation graphique de  $x \mapsto x^n$  lorsque  $n \in \mathbb{Z}$  : [A connaître](#).

Représentation graphique de  $x \mapsto x^\alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$  : [A connaître](#).

**Convention :** Pour tout  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $0^b = 0$  et  $\boxed{0^0 = 1}$ .

## 5 Etude d'une fonction

### 5.1 Plan d'étude

Plan d'étude d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

1. Calcul du domaine de définition de  $f$ .
2. Si  $f$  est paire, impaire ou/et périodique, on peut réduire le domaine d'étude.
3. Calcul de  $f'(x)$  et étude de son signe.
4. Tableau de variations de  $f$ . Indiquez notamment les limites de  $f$  aux bornes des intervalles.
5. Etude des branches infinies si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ .

### 5.2 Etude des branches infinies

Soit  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ . On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$ .

1. S'il existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \mu$ , on dit que le graphe de  $f$  admet une direction asymptotique de pente  $\mu$ .
  - S'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) - \mu x \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \alpha$ , la droite affine d'équation  $y = \mu x + \alpha$  est une asymptote de la courbe au voisinage de  $\varepsilon\infty$ .
  - Si  $f(x) - \mu x \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$ , on dit que le graphe de  $f$  présente au voisinage de  $\varepsilon\infty$  une branche parabolique de pente  $\mu$ .  
En particulier, lorsque  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} 0$ , on est en présence d'une branche parabolique horizontale.
  - Autres cas : il y a seulement une direction asymptotique.
2. Si  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \varepsilon\infty} \pm\infty$ , le graphe de  $f$  admet une branche parabolique verticale.
3. Autres cas : on ne peut rien dire.

## 6 Déformations du graphe

**Notation.**  $f$  désigne une fonction de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $D \subset \mathbb{R}$ .

**Propriété.** On fixe un réel  $a$ .

- Le graphe de  $x \mapsto f(x) + a$  se déduit du graphe de  $f$  par la translation de vecteur  $a\vec{j}$ .
- Le graphe de  $x \mapsto f(x + a)$  se déduit du graphe de  $f$  par la translation de vecteur  $-a\vec{i}$ . **A savoir établir.**
- Le graphe de  $x \mapsto f(a - x)$  se déduit du graphe de  $f$  par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse  $\frac{a}{2}$ .
- Le graphe de  $x \mapsto f(ax)$  se déduit du graphe de  $f$  par l'affinité orthogonale d'axe invariant  $Oy$  et de coefficient  $\frac{1}{a}$ , qui correspond, en identifiant un point avec le couple de ses coordonnées, à la transformation  $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, y)$  (**A savoir établir**). Ceci a pour effet,
  - lorsque  $a > 1$ , d'écraser le graphe de  $f$  d'un facteur  $a$  vers l'axe des ordonnées, parallèlement à l'axe  $Ox$ ,
  - lorsque  $0 < a < 1$ , d'étirer le graphe de  $f$  d'un facteur  $\frac{1}{a}$  autour de l'axe  $Oy$ , parallèlement à l'axe  $Ox$ .
- Le graphe de  $x \mapsto af(x)$  se déduit du graphe de  $f$  par une affinité d'axe invariant  $Ox$  et de coefficient  $a$ , i.e par la transformation  $(x, y) \mapsto (x, ay)$ .



## 7 Trigonométrie hyperbolique

**Définition.** On définit les fonctions usuelles suivantes :

- cosinus hyperbolique :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$
- sinus hyperbolique :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$
- tangente hyperbolique :  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$

**Propriété.** Les fonctions sh, ch et th sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \quad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \quad \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

**Il faut connaître les graphes de sh, ch et th.**

Toute formule de la trigonométrie circulaire est associée avec une formule duale de la trigonométrie hyperbolique. Cependant, le programme officiel se limite à la formule suivante :

**Formule :**  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

Mais il n'est pas interdit de connaître quelques formules de trigonométrie hyperbolique :

- $\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$
- $\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b,$
- $\operatorname{ch}^2 a = \frac{\operatorname{ch}(2a) + 1}{2}, \operatorname{sh}^2 a = \frac{\operatorname{ch}(2a) - 1}{2} \geq 0.$