DM 4 : corrigé.

A) Les fonctions puissances

1°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. On sait d'après le cours de Terminale que $\ln(x^n) = n \ln x$, donc en passant à l'exponentiel, $x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln x) = e^{n \ln x}$.

2°) Notons f l'application $x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. f est égale à la composée $u \circ v$ en posant $u = \exp$ et $v = (x \longmapsto \alpha \ln x)$, donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée d'applications dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$f'(x) = v'(x)u'(v(x)) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{-\ln(x)} e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln x}$, donc $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

3°) Soit $x \in]1, +\infty[$. $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$, donc $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

4°) $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2$.

5°)
$\diamond$ D'après les questions précédentes on a immédiatement l'existence des deux premières intégrales avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

$\diamond$ Étudions d'abord le cas où $\alpha = 1$.
Pour tout $x > 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ n'est pas définie.
De même, pour tout $x < 1$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ n'est pas définie.

$\diamond$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 1$.
D'après la question 2, l'application $t \longmapsto \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big) = t^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln t} = \dfrac{1}{e^{\alpha \ln t}} = \dfrac{1}{t^\alpha}$, donc $t \longmapsto \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ est une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\diamond$ Soit $x > 1$. $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \Big[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big]_1^x = \frac{e^{(-\alpha+1)\ln x} - 1}{1-\alpha}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, cette dernière quantité converge vers un réel si et seulement si $-\alpha + 1 < 0$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

est définie si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

$\diamond$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$. Soit $x < 1$. $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1 - e^{(-\alpha+1)\ln x}}{1-\alpha}$. Lorsque x tend vers 0, cette dernière quantité converge vers un réel si et seulement si $-\alpha + 1 > 0$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est définie si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

B) Une intégrale doublement impropre

6°) $f(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ et $1 - x > 0$, donc le domaine de définition de f est $]0, 1[$.

7°) Soit $u \in \mathbb{R}$. $\cos u = 0 \iff u \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, donc le domaine de définition de tan est $D = \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.
En tant que quotient de fonctions dérivables, tan est dérivable sur D et, pour tout $u \in D$, $\tan'(u) = \dfrac{\cos^2 u - (-\sin u)\sin u}{\cos^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u}$.

8°)
$\diamond$ L'intégrale de l'énoncé, que l'on notera $I(\alpha)$, est bien définie car $[\frac{1}{2}, \sin^2\alpha] \subset]0, 1[$ et f est continue sur $]0, 1[$.
Posons $J(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^x f(t)\ dt$, pour tout $x \in]0, 1[$. Ainsi J est dérivable sur $]0, 1[$ et $I(\alpha) = J(\sin^2\alpha)$, donc par dérivation d'une fonction composée, I est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $I'(\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha J'(\sin^2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha\dfrac{\ln(\sin^2\alpha)}{\sin\alpha\cos^3\alpha}$, car $\sin\alpha > 0$ et $\cos\alpha > 0$.
Ainsi, $I'(\alpha) = \dfrac{4\ln\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$, or I' étant continue,
$I(\alpha) = I(\dfrac{\pi}{4}) + \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha I'(u)\ du$, donc $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha \frac{4\ln\sin u}{\cos^2 u}\ du$.
$\diamond$ En intégrant par parties, d'après la question précédente,
$I(\alpha) = \Big[4(\ln\sin u)\tan u\Big]_{\frac{\pi}{4}}^\alpha - \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha 4\tan u\frac{\cos u}{\sin u}\ du = 4\tan\alpha\ln\sin\alpha + 2\ln 2 - 4(\alpha - \frac{\pi}{4})$.
Finalement, $I(\alpha) = 4(\tan\alpha)\ln(\sin\alpha) - 4\alpha + 2\ln 2 + \pi$.

9°) Par définition de la dérivée de ln en 1, $\dfrac{\ln t - \ln 1}{t - 1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \ln'(1) = 1$. Or,

$$\begin{aligned}
4(\tan\alpha)\ln(\sin\alpha) &= 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ln(\sin^2\alpha) \\
&= 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\ln(\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha}(1-\sin^2\alpha) \\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\ln(\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha},
\end{aligned}$$

donc par composition des limites, $4(\tan\alpha)\ln(\sin\alpha) \underset{\alpha\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sin^2(\alpha)} f(x)\ dx \underset{\alpha\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} -2\pi + 2\ln 2 + \pi = 2\ln 2 - \pi$.

10°) Soit $x \in]0,1[$. D'après l'énoncé, $x = \sin^2(\arcsin(\sqrt{x}))$ et d'après la continuité de arcsin, $\arcsin(\sqrt{x}) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, car $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
À nouveau par composition des limites, on en déduit que
$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^{[\sin(\arcsin\sqrt{x})]^2} f(t)\ dt \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\pi + 2\ln 2$.
Ceci montre que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\ dx$ est bien définie et que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\ dx = -\pi + 2\ln 2$.

11°) Lorsque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$, le calcul de la question 8 reste valable. Ainsi,
$\displaystyle\int_{\sin^2\alpha}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx = -(4(\tan\alpha)\ln(\sin\alpha) - 4\alpha + 2\ln 2 + \pi)$.
$\tan\alpha\ln(\sin\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)\ln(\sin(\alpha))}{\cos(\alpha)}$, or $\sin\alpha \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$ et d'après les croissances comparées, $x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\sin(\alpha)\ln(\sin(\alpha)) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$, puis $\tan\alpha\ln(\sin\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que
$\displaystyle\int_{\sin^2\alpha}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} -2\ln 2 - \pi$.
De même qu'en question 10, $\displaystyle\int_{x}^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt = \int_{[\sin(\arcsin\sqrt{x})]^2}^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\pi - 2\ln 2$, car $\arcsin(0) = 0$.
On a ainsi montré que $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx$ est bien définie et que $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\ dx = -2\ln 2 - \pi$.

12°) D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}
\int_a^c g(t)\ dt + \int_c^b g(t)\ dt &= \lim_{x\to a}\int_x^c g(t)\ dt + \lim_{y\to b}\int_c^y g(t)\ dt \\
&= \lim_{x\to a}\Big(\int_x^c g(t)\ dt + \lim_{y\to b}\int_c^y g(t)\ dt\Big) \\
&= \lim_{x\to a}\lim_{y\to b}\Big(\int_x^c g(t)\ dt + \int_c^y g(t)\ dt\Big),
\end{aligned}$$

donc d'après la relation de Chasles pour les intégrales ordinaires,
$\displaystyle\int_a^c g(t)\ dt + \int_c^b g(t)\ dt = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b}\Big(\int_x^y g(t)\ dt\Big)$, ce qui permet de conclure car cette dernière quantité ne dépend pas de c.

13°) D'après les questions précédentes, avec $c = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}\ dx$ est bien définie et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}\ dx = -2\pi$.

C) Un peu de théorie

14°)

◇ f étant continue, elle possède une primitive que l'on notera F.

Alors $\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt = F(b) - F(x)$. F est dérivable, donc elle est continue en a.

Ainsi, $F(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} F(a)$ ce qui prouve que

$$\int_x^b f(t)\ dt = F(b) - F(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

De même, on montre que $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt$.

Cela signifie que la définition de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ donnée après la question 4 est cohérente avec la notion usuelle d'intégrale.

◇ On a vu que $\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc si l'on pose $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 1$, on définit une application f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_x^1 f(t)\ dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\ dt$, donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\ dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\ dt$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ dt$ est bien définie.

15°) Posons, pour tout $x \in [a, b[$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.

$F'(x) = f(x) \geq 0$, donc F est croissante. Alors, d'après le théorème de la limite monotone, il existe $L \in \mathbb{R}$ telle que $F(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} L$ si et seulement si l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est majorée, ce qu'il fallait démontrer.

16°)

◇ D'après la question précédente, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \leq M$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x g(t)\ dt \leq \int_a^x f(t)\ dt \leq M$, donc l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\ dt$ est majorée, or pour tout t, $g(t) \geq 0$, donc toujours d'après la question précédente, $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ est définie.

◇ Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \dfrac{|\cos t|}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$, or d'après la question 3, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est définie, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2}\ dt$ est définie.

17°)

◇ Soit $t \in [a, b[$. Supposons d'abord que $f(t) \geq 0$. Alors $f^+(t) = f(t) = |f(t)|$ et $f^-(t) = 0$, donc $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$ et $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$.

De même, si $f(t) \leq 0$, alors $f^-(t) = -f(t) = |f(t)|$ et $f^+(t) = 0$,
donc $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$ et $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$.
En conclusion, $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.
$\diamond$ On en déduit que $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, donc f^+ et f^- sont continues.
$\diamond$ Supposons que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$ est définie.
Pour tout $t \in [a, b[$, $0 \leq f^+(t) \leq f^+(t) + f^-(t) = |f(t)|$, donc d'après la question précédente, $\displaystyle\int_a^b f^+(t)\ dt$ est définie.
De même, $0 \leq f^- \leq |f|$, donc $\displaystyle\int_a^b f^-(t)\ dt$ est aussi définie. Alors, pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^x f^+(t)\ dt - \int_a^x f^-(t)\ dt \underset{t \to b}{\longrightarrow} \int_a^b f^+(t)\ dt - \int_a^b f^-(t)\ dt \in \mathbb{R}$. Ceci prouve que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est définie.

D) Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$

18°) D'après la question 14, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ dt$ est définie, donc d'après la question 12, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$ est définie.
En intégrant par parties, pour $x \in]1, +\infty[$,
on obtient $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\ dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\ dt$.
$\displaystyle\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\displaystyle\frac{\cos x}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'après la question 16, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2}\ dt$ est définie, donc d'après la question 17, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\ dt$ est définie. On en déduit que $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\ dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\ dt$, ce qu'il fallait démontrer, car cette dernière quantité est réelle.

19°) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : $\displaystyle\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.
Pour $n = 0$, une somme vide étant nulle, il s'agit de montrer que $\displaystyle\frac{\sin t}{\sin t} = 1$, ce qui est vrai.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. Alors $\displaystyle 1 + 2\sum_{k=1}^{n+1} \cos(2kt) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} + 2\cos(2n+2)t$,
donc pour établir $R(n+1)$, il suffit de montrer que

$(C)\ :\ \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}+2\cos(2n+2)t=\dfrac{\sin((2n+3)t)}{\sin t}$.
Or $(C)\iff \sin(2n+3)t-\sin(2n+1)t=2\cos(2n+2)t\ \sin t$, ce qui est vrai d'après la formule $\sin a-\sin b=2\sin\dfrac{a-b}{2}\ \cos\dfrac{a+b}{2}$.

20°) $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}2n+1$, donc l'application $t\longmapsto\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}$ se prolonge en une application continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, notée g. Ainsi, de même qu'en question 14, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\,dt$. Notons J_n cette intégrale.

D'après la question précédente, et le fait qu'en $t=0$, $1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)=2n+1=g(0)$,

$J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)\Big)\,dt=\frac{\pi}{2}+2\sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{\sin(2kt)}{2k}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$. On en déduit que $J_n=\frac{\pi}{2}$.

21°) $\diamond$ Posons $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$, qui est bien définie car
$\dfrac{\sin(2n+1)t}{t}=\dfrac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)t}\times(2n+1)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}2n+1$, donc $t\longmapsto\dfrac{\sin(2n+1)t}{t}$ se prolonge en 0 en une application continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$I_n-J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(t)\sin(2n+1)t\,dt$. h étant C^1, on peut intégrer par parties :

$I_n-J_n=\Big[h(t)\dfrac{-\cos(2n+1)t}{2n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}h'(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\,dt$,

donc $I_n-J_n=\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}h'(t)\cos(2n+1)t\,dt$, car $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}=0$ et $h(0)=0$.

Alors, par inégalité triangulaire, $|I_n-J_n|\le\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|h'(t)|\,dt=\frac{C}{2n+1}$, où C est une quantité indépendante de n. Ainsi, d'après le principe des gendarmes,
$I_n-J_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, or $J_n=\frac{\pi}{2}$. Ceci démontre que $I_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\pi}{2}$.

$\diamond$ Reprenons la fonction f définie à la fin de la question 14. f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle possède au moins une primitive, que l'on notera F.

Alors, $\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{F((2n+1)t)}{2n+1}\Big)=F'((2n+1)t)=f((2n+1)t)=\dfrac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t}$,

donc $t\longmapsto\dfrac{F((2n+1)t)}{2n+1}$ est une primitive de $t\longmapsto\dfrac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t}$, ce qui montre que

$I_n=(2n+1)\Big[\dfrac{F((2n+1)t)}{2n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$.

On a donc montré que $\displaystyle\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx\underset{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}$.

$\diamond$ On peut mettre ceci sous la forme $\displaystyle\int_1^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \int_0^1 f(x)\ dx$, or on a montré en question 18 qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_1^x f(t)\ dt \underset{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} L$, donc par composition des limites, $\displaystyle\int_1^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} L$, puis par unicité de la limite,
$L = \displaystyle\frac{\pi}{2} - \int_0^1 f(x)\ dx$. Mais par définition, $L = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$, donc
$\displaystyle\frac{\pi}{2} = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$ (d'après la question 12).