DM 3 : un corrigé

Partie I : fonctions convexes

1°) La fonction exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}(e^x) = e^x \geq 0$, donc $\exp'$ est croissante et exp est bien une application convexe sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$. f et g étant convexes,
$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ et $g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y)$,
or a et b sont positifs, donc $af(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha af(x) + (1-\alpha)af(y)$
et $bg(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha bg(x) + (1-\alpha)bg(y)$, puis en sommant ces inégalités,
$(af+bg)(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha(af+bg)(x)+(1-\alpha)(af+bg)(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) Pour tout $x \in I$, l'application $t \longmapsto f(x,t)\varphi(t)$ est continue sur $[a,b]$, donc la quantité $J(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\varphi(t)\,dt$ est bien définie. Il reste à montrer que l'application J est convexe sur I.
Soit $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$.
Pour tout $t \in [a,b]$, par convexité de l'application $z \longmapsto f(z,t)$,
$f(\alpha x + (1-\alpha)y, t) \leq \alpha f(x,t) + (1-\alpha)f(y,t)$, puis en multipliant par $\varphi(t)$ qui est positif, on obtient $f(\alpha x + (1-\alpha)y, t)\varphi(t) \leq \alpha f(x,t)\varphi(t) + (1-\alpha)f(y,t)\varphi(t)$ donc en intégrant cette inégalité entre a et b, on obtient
$J(\alpha x+(1-a)y) \leq \displaystyle\int_a^b [\alpha f(x,t)\varphi(t)+(1-\alpha)f(y,t)\varphi(t)]\,dt = \alpha J(x)+(1-\alpha)J(y)$, par linéarité de l'intégrale. Ceci prouve que J est convexe sur I.

4°) On intégre deux fois par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt &= [f(t)\sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t f'(t)\,dt \\
&= [f'(t)\cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,dt \\
&= f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos t\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} f''(t)(1-\cos t)\,dt,
\end{aligned}$$

or f est convexe, donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f''(t) \geq 0$ et on sait que, $1 - \cos t \geq 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt \geq 0$.

5°) Pour tout $x \in [-1,1]$, posons $g(x) = xf(x)$. Ainsi g est une application deux fois dérivable sur $[-1,1]$ et on calcule : $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ puis $g''(x) = 2f'(x) + xf''(x)$.
Posons $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$: h est une application deux fois dérivable sur $[-1,1]$ telle que, pour tout $x \in [-1,1]$, $h''(x) = 2f'(x) + xf''(x) - 1 \geq 0$. Ceci prouve que h est convexe sur $[-1,1]$, donc en particulier que,
pour tout $x \in [-1,1]$, $\frac{1}{2}[h(x) + h(-x)] \geq h\Big(\frac{x + (-x)}{2}\Big) = h(0) = g(0) = 0$, donc en intégrant on obtient : $\int_0^1 (h(x) + h(-x))\ dx \geq 0$.
h étant continue, elle possède au moins une primitive notée H.
$\frac{d}{dx}(-H(-x)) = H'(-x) = h(-x)$,
donc $\int_0^1 h(-x)\ dx = -H(-1) - (-H)(0) = H(0) - H(-1) = \int_{-1}^0 h(x)\ dx$.
Ainsi l'inégalité précédente s'écrit $\int_{-1}^1 h(x)\ dx \geq 0$.
Or $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{2}\ dx = \Big[\frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$, donc $0 \leq \int_{-1}^1 h(x)\ dx = \int_{-1}^1 xf(x)\ dx - \frac{1}{3}$, ce qui prouve que $\int_{-1}^1 xf(x)\ dx \geq \frac{1}{3}$.

6°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$.

Pour $n = 1$, pour tout $x_1 \in I$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_1 = 1$, on a bien sûr $\sum_{i=1}^1 \lambda_i x_i = x_1 \in I$, ce qui prouve $S(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $S(n)$.
Soit $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Posons $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Alors $1 - \alpha = \lambda_{n+1}$, donc α et $1 - \alpha$ sont positifs. Ainsi $\alpha \in [0,1]$.

Supposons d'abord que $\alpha > 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1-\alpha)x_{n+1}$, or d'après $S(n)$, en tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in I$. De plus $x_{n+1} \in I$, donc d'après la propriété admise en début d'énoncé,
$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1-\alpha)x_{n+1} \in I$.
Enfin, si $\alpha = 0$, alors $0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, donc $\lambda_{n+1} = 1$ et

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = x_{n+1} \in I$. Ainsi, on a prouvé $S(n+1)$ dans tous les cas.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S(n)$ est vraie, ce qu'il fallait démontrer.

6°) b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x_1, \ldots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Remarquons que cet énoncé a bien un sens d'après a).
$\diamond$ Supposons d'abord que $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $R(2)$ est en particulier vraie, donc pour tout $x_1, x_2 \in I$, pour tout $\lambda_1 \in [0,1]$, en posant $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, on a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, donc d'après $R(2)$, $f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$, ce qui prouve que f est convexe.
$\diamond$ Réciproquement, supposons f est convexe et montrons $R(n)$ par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, pour tout $x_1 \in I$ et $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda_1 = 1$, on a bien sûr
$f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{1} \lambda_i x_i\Big) = f(x_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{1} \lambda_i f(x_i)$, donc $R(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $R(n)$. Soit $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) = f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big)$. Posons $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
Alors $1 - \alpha = \lambda_{n+1}$, donc α et $1 - \alpha$ sont positifs. Ainsi $\alpha \in [0,1]$,
or f est convexe, donc lorsque $\alpha > 0$,
$f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) = f\Big(\alpha \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i + (1-\alpha) x_{n+1}\Big) \leq \alpha f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i\Big) + (1-\alpha) f(x_{n+1})$, puis d'après $R(n)$, en tenant compte du fait que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$,
$f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) \leq \alpha \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$.
Enfin, si $\alpha = 0$, alors $0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, donc $\lambda_{n+1} = 1$ et
$f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) = f(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$.
Ainsi, on a prouvé $R(n+1)$ dans tous les cas.

7°) S'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_i = 0$,
alors l'inégalité est vraie car $\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}} = 0 \leq \frac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.
Sinon, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i > 0$ et, par croissance des fonctions ln et exp, on a

$$\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \iff \ln\Big[\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{\frac{1}{n}}\Big] \leq \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)$$
$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)$$
$$\iff (-\ln)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-\ln)(x_i).$$

Cette dernière égalité est vraie d'après l'inégalité de Jensen, car la fonction $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, elle est deux fois dérivable et pour tout $x > 0$, $(-\ln)''(x) = \dfrac{1}{x^2} \geq 0$.

8°)

$\displaystyle\prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}}$ est non nul et $\displaystyle\frac{1+\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^n (1+x_k)^{\frac{1}{n}}} = \Big(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}\Big)^{\frac{1}{n}} + \Big(\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_k}\Big)^{\frac{1}{n}}$,

donc d'après la question 7,

$$\frac{1+\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^n [(1+x_k)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1+x_k}{1+x_k} = 1.$$

Ainsi, $\displaystyle 1+\Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{k=1}^n [(1+x_k)^{\frac{1}{n}}]$.

Partie 2 : fonctions log-convexes

9°) Posons $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(f(x)) = -3\ln(x)$. On a déjà vu que $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après la question 2, $\ln \circ f$ est convexe, ce qu'il fallait démontrer.

10°)

◇ Supposons que f est log-convexe.

Soit $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$. $\ln \circ f$ étant convexe,
$\ln(f(\alpha x+(1-\alpha)y)) \leq \alpha\ln(f(x))+(1-\alpha)\ln(f(y))$ donc en passant à l'exponentielle, qui est bien croissante, $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq e^{\alpha\ln(f(x))+(1-\alpha)\ln(f(y))}$, mais d'après la question 1, la fonction exp est convexe, donc $e^{\alpha\ln(f(x))+(1-\alpha)\ln(f(y))} \leq \alpha e^{\ln(f(x))} + (1-\alpha)e^{\ln(f(y))}$.
On en déduit que $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, donc f est convexe.

◇ L'application $x \longmapsto x$ est clairement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ mais $\ln \circ f = \ln$ et $\ln$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Ainsi, la réciproque est fausse.

11°) f est log-convexe si et seulement si $(C)\ :\ (\ln\circ f)'' \geq 0$.
Pour tout $x\in I$, $(\ln\circ f)'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ puis $(\ln\circ f)''(x) = \dfrac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2}$,
donc $(C) \Longleftrightarrow \forall x\in I,\ \ f''(x)f(x) \geq f'(x)^2$.

12°) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln[(fg)(x)] = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$, or d'après la question 2, la somme de deux fonctions convexes est convexe, donc $x\longmapsto \ln((fg)(x))$ est convexe, ce qui prouve que fg est une application log-convexe.

13°) Soit $x\in I$. Il s'agit de montrer que $(f+g)''(x)(f+g)(x) \geq (f+g)'(x)^2$. Notons (D) cette inégalité. En notant h au lieu de $h(x)$, pour toute application h de I dans $\mathbb{R}_+^*$, $(D) \Longleftrightarrow f''f + g''g + f''g + g''f \geq f'^2 + g'^2 + 2f'g'$, or d'après la question 11, $f''f \geq f'^2$ et $g''g \geq g'^2$, donc pour obtenir (D), il suffit de montrer que $f''g + g''f \geq 2f'g'$.
On sait que $(f'g - fg')^2 \geq 0$, donc en développant, $2fgf'g' \leq f'^2g^2 + f^2g'^2$, or à nouveau $f''f \geq f'^2$ et $g''g \geq g'^2$, donc $2fgf'g' \leq f''fg^2 + g''gf^2$, puis en simplifiant par $f(x)g(x)$ qui est strictement positif, on en déduit que $2f'g' \leq f''g + g''f$ ce qui conclut.

14°)
$\diamond$ Supposons que f est log-convexe sur I. Soit $a\in\mathbb{R}$. Pour tout $x\in I$, $\ln(g(x)) = ax$, or l'application $x\longmapsto ax$ est convexe sur I car elle vérifie la définition de la convexité ; dans ce cas en effet, l'inégalité à vérifier est même une égalité. Ainsi g est log-convexe, puis d'après la question 12, gf est log-convexe.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $x\longmapsto e^{ax}f(x)$ est convexe sur I. Fixons $x,y\in I$ avec $x<y$ et $t\in]0,1[$. Posons $z = tx + (1-t)y$. Par hypothèse, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $e^{az}f(z) \leq te^{ax}f(x) + (1-t)e^{ay}f(y)$, donc
$f(z) \leq te^{a(x-z)}f(x) + (1-t)e^{a(y-z)}f(y)$, or $x - z = (1-t)(x-y)$ et $y - z = t(y-x)$, donc en posant $g(a) = te^{a(1-t)(x-y)}f(x) + (1-t)e^{ta(y-x)}f(y)$, on a $f(z) \leq g(a)$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.
On cherche à minimiser la quantité $g(a)$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$g'(a) = t(1-t)(x-y)[e^{a(1-t)(x-y)}f(x) - e^{ta(y-x)}f(y)]$, donc

$$\begin{aligned} g'(a) = 0 \quad &\Longleftarrow e^{a(1-t)(x-y)}f(x) = e^{ta(y-x)}f(y)\\ &\Longleftarrow a(1-t)(x-y) + \ln(f(x)) = ta(y-x) + \ln(f(y))\\ &\Longleftarrow a = \frac{\ln(f(y)) - \ln(f(x))}{x-y}. \end{aligned}$$

Posons $a_0 = \dfrac{\ln(f(y)) - \ln(f(x))}{x-y}$: $f(tx + (1-t)y) = f(z) \leq g(a_0)$, or

$$\begin{aligned} g(a_0) \quad &= te^{(\ln(f(y))-\ln(f(x)))(1-t)}f(x) + (1-t)e^{t(\ln(f(x))-\ln(f(y)))}f(y)\\ &= tf(x)\Big(\frac{f(y)}{f(x)}\Big)^{1-t} + (1-t)f(y)\Big(\frac{f(x)}{f(y)}\Big)^{t}\\ &= tf(x)^t f(y)^{1-t} + (1-t)f(y)^{1-t}f(x)^t = f(x)^t f(y)^{1-t}. \end{aligned}$$

Ainsi $f(tx + (1-t)y) \leq e^{t\ln(f(x)) + (1-t)\ln(f(y))}$, puis en passant au log, on en déduit bien que f est log-convexe.

15°) On suppose à nouveau que f et g sont log-convexes. Soit $a\in\mathbb{R}$. $x\longmapsto e^{ax}f(x)$ et $x\longmapsto e^{ax}g(x)$ sont convexes, donc leur somme est également convexe :

$x \longmapsto e^{ax}(f+g)(x)$ est convexe pour tout $a \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, $f+g$ est log-convexe.

16°)

$\diamond$ Soit $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.
g est convexe, donc $g(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y)$.
h est croissante, donc $(h \circ g)(tx+(1-t)y) \leq h(tg(x)+(1-t)g(y))$.
De plus, h et convexe, donc $h(tg(x)+(1-t)g(y)) \leq th(g(x))+(1-t)h(g(y))$.
On en déduit que $(h \circ g)(tx+(1-t)y) \leq t(h \circ g)(x)+(1-t)(h \circ g)(y)$, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ Une composée d'applications convexes n'est pas toujours convexe, ainsi que le prouve le contre-exemple suivant ; Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = e^{-x}$. f est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, convexe car deux fois dérivable avec $f''(x) = 2x^{-3} > 0$ lorsque $x > 0$ et g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe car deux fois dérivable avec $g''(x) = e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $g \circ f$ est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On calcule $(g \circ f)'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ puis $(g \circ f)''(x) = \Big(-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\Big)e^{-\frac{1}{x}}$, donc par exemple $(g \circ f)''(1) = -e^{-1} < 0$, ce qui prouve que $g \circ f$ n'est pas convexe.

17°)

$\diamond$ Supposons que $\ln \circ f$ est convexe. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, d'après la question 2, $\alpha \ln \circ f$ est encore convexe. De plus, d'après la question 1, l'application exp est convexe et elle est croissante, donc d'après la question précédente ,$f^\alpha = \exp \circ (\alpha \ln \circ f)$ est convexe.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que, f^α est convexe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Fixons $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\alpha \ln(f(tx+(1-t)y))} = f^\alpha(tx+(1-t)y) \leq te^{\alpha \ln(f(x))}+(1-t)e^{\alpha \ln(f(y))}$, donc $e^{\alpha \ln(f(tx+(1-t)y))}-1 \leq t(e^{\alpha \ln(f(x))}-1)+(1-t)(e^{\alpha \ln(f(y))}-1)$,
or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en posant $g(v) = e^{\lambda v}$ pour tout $v \in \mathbb{R}$,
$\dfrac{e^{\lambda u}-1}{u} = \dfrac{e^{\lambda u}-e^{\lambda \times 0}}{u-0} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} g'(0) = \lambda$, donc en divisant par α l'inégalité précédente puis en faisant tendre α vers 0, on obtient
$\ln(f(tx+(1-t)y)) \leq t\ln(f(x))+(1-t)\ln(f(y))$, donc $\ln \circ f$ est bien convexe.

Partie III : Inégalité de Hölder

18°)

$\diamond$ Soit $q \in \mathbb{R}^*$.
$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{q} = 1-\dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p} \Longleftrightarrow q = \dfrac{p}{p-1}$, car $p-1 \neq 0$. Ceci prouve que le réel $\dfrac{p}{p-1}$, qui est non nul, est l'unique réel q tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$.
$\diamond$ On a vu que $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par définition de la convexité,
$-\ln(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}) \leq -\frac{1}{p}\ln x - \frac{1}{q}\ln y$, d'où l'on déduit l'inégalité demandée.

19°) **a)** Soit $t \in [a, b]$.
si $f(t) \neq 0$ et $g(t) \neq 0$, alors en appliquant la question précédente avec $x = |f(t)|^p$ et $y = |g(t)|^q$, on obtient $\ln\Big(\dfrac{[f(t)|^p}{p}+\dfrac{|g(t)|^q}{q}\Big) \geq \dfrac{1}{p}\ln|[f(t)|^p]+\dfrac{1}{q}\ln|[g(t)|^q] = \ln(|f(t)|g(t)|)$,
donc en passant à l'exponentielle, $|f(t)g(t)| \leq \dfrac{[f(t)|^p}{p} + \dfrac{|g(t)|^q}{q}$.
Cette inégalité est encore vraie lorsque $f(t) = 0$ ou $g(t) = 0$,
et on conclut en intégrant cette inégalité entre a et b.

b) Utilisons dès maintenant la notation définie en question 20.
◇ Premier cas : on suppose que $\|f\|_p = 0$.
Alors $t \longmapsto |f(t)|^p$ est une application positive, continue et dont l'intégrale entre a et b est nulle, donc d'après le cours, c'est l'application identiquement nulle. On en déduit que $f = 0$, donc dans ce cas, on a bien $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\ dt = 0 \leq 0 = \|f\|_p\|g\|_q$.
On raisonne de même lorsque $\|g\|_q = 0$.
◇ Second cas : on suppose que $\|f\|_p > 0$ et que $\|g\|_q > 0$. On peut alors appliquer l'inégalité de la question précédente en remplaçant f par $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{\|f\|_p}$ et g par $t \longmapsto \dfrac{g(t)}{\|g\|_q}$. On obtient : $\displaystyle\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|\ dt}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\times\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_a^b |f(t)|^p\ dt+\frac{1}{q}\times\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_a^b |g(t)|^q\ dt$,
puis $\displaystyle\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|\ dt}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \times \frac{1}{\|f\|_p^p} \times \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \times \frac{1}{\|g\|_q^q} \times \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc
$\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\ dt \leq \|f\|_p\|g\|_q$, ce qu'il fallait démontrer.

20°) $\displaystyle\|f + g\|_p^p = \int_a^b |f(t) + g(t)|^p\ dt \leq \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1}(|f(t)| + |g(t)|)\ dt$,
donc $\displaystyle\|f + g\|_p^p \leq \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1}|f(t)|\ dt + \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1}|g(t)|\ dt$, or d'après l'inégalité de Hölder, $\displaystyle\int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1}|f(t)|\ dt \leq \|f\|_p\Big(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{(p-1)q}\ dt\Big)^{\frac{1}{q}}$.
De plus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc en multipliant par pq, $q + p = pq$ puis $(p-1)q = p$. Ainsi,
$\displaystyle\int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1}|f(t)|\ dt \leq \|f\|_p\Big(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\ dt\Big)^{\frac{1}{q}}$ et de même,
$\displaystyle\int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1}|g(t)|\ dt \leq \|g\|_p\Big(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\ dt\Big)^{\frac{1}{q}}$. On en déduit que
$\displaystyle\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\Big(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\ dt\Big)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$.
Si $\|f + g\|_p = 0$, on a clairement $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
Sinon, on peut diviser l'inégalité par $\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$ qui est strictement positif, ce qui donne $\|f + g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Or $p - \frac{p}{q} = \frac{pq-p}{q} = \frac{q}{q} = 1$, donc l'inégalité triangulaire est établie dans tous les cas.

21°) $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, donc si l'on pose $p' = \frac{p}{r}$ et $q' = \frac{q}{r}$, on a $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ et $p' > 1$ (car $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{q'} < 1$). On peut donc utiliser la formule de Hölder avec p' et q'. Ainsi, $\|fg\|_r^r = \displaystyle\int_a^b |f(t)|^r[g(t)|^r\ dt \le \||f|^r\|_{p'}\||g|^r\|_{q'} = \Big(\int_a^b |f(t)|^{rp'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \times \Big(\int_a^b |g(t)|^{rq'}\Big)^{\frac{1}{q'}}$.
Ainsi, $\|fg\|_r^r \le \|f\|_p^r\|g\|_q^r$. On conclut en élevant cette inégalité à la puissance $\frac{1}{r}$, ce qui est correct car l'application $x \longmapsto x^{\frac{1}{r}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

22°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$, pour tout $f_1, \dots, f_n \in E$, on a $\displaystyle\Big\| \prod_{k=1}^{n} f_k \Big\|_r \le \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}$.
Pour $n = 1$, on a $p_1 = r$, donc la propriété est évidente.
On suppose que $n \ge 1$ et que $R(n)$ est vraie.
Soit $p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$, soit $f_1, \dots, f_{n+1} \in E$.

Notons r' l'unique réel strictement positif tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r'}$.

Ainsi, $\displaystyle\frac{1}{r'} + \frac{1}{p_{n+1}} = \frac{1}{r}$, donc, en posant $f = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} f_k$, d'après la question précédente, $\displaystyle\Big\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \Big\|_r = \|f \times f_{n+1}\|_r \le \|f\|_{r'}\|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}$, or d'après $R(n)$, $\|f\|_{r'} \le \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{p_k}$, donc $\displaystyle\Big\| \prod_{k=1}^{n+1} f_k \Big\|_r \le \prod_{k=1}^{n+1} \|f_k\|_{p_k}$, ce qui prouve $R(n+1)$.