Résumé de cours :
Semaine 3, du 16 au 20 septembre.

1 Applications trigonométriques réciproques

Les graphes des fonctions usuelles de ce chapitre sont à connaître.

1.1 Trigonométrie circulaire

La fonction arcsin : l'application sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective, continue et strictement croissante. On note arcsin son application réciproque, de $[-1, 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est continue, impaire et strictement croissante sur $[-1, 1]$.
La restriction de sin à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est un C^∞-difféomorphisme sur $]-1, 1[$, dont le C^∞-difféomorphisme réciproque est la restriction de arcsin à $]-1, 1[$.
Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arccos : l'application cos : $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective, continue et strictement décroissante. On note arccos son application réciproque, de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$. Elle est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
La restriction de cos à $]0, \pi[$ est un C^∞-difféomorphisme sur $]-1, 1[$, dont le C^∞-difféomorphisme réciproque est la restriction de arccos à $]-1, 1[$.
Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété. $\forall t \in [-1, 1] \quad \cos(\arccos t) = t$ et $\sin(\arcsin\ t) = t$, mais en général, $\arccos(\cos t) \neq t$.
Plus précisément, $\arccos(\cos t) = t \iff t \in [0, \pi]$.
Ainsi, lorsque $t \notin [0, \pi]$, $\arccos(\cos t) = t_0$ où $t_0 \in [0, \pi]$ et $\cos t = \cos t_0$.

La fonction arctan : l'application tan :$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est un C^∞-difféomorphisme strictement croissant, dont le C^∞-difféomorphisme réciproque est noté.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1.2 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions réciproques des fonctions ch, sh et th ne sont pas au programme.

La fonction argsh : sh est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argsh (“argument sinus hyperbolique”). Ainsi argsh est une application C^∞, impaire, strictement croissante. $\text{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
A savoir établir : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

La fonction argch : L'application ch est une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$. Son application réciproque est notée argch. C'est une bijection continue strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.
ch est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1, +\infty[$, donc argch est C^∞ sur $]1, +\infty[$.
$\text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\text{argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

La fonction argth : th est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, dont le difféomorphisme réciproque est noté argth Ainsi argth est une application C^∞, impaire, strictement croissante de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. $\text{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\text{argth}x = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$.

2 Calculs d'intégrales

2.1 Changement de variables

Théorème. On suppose que f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$,
et que φ est une application **de classe** C^1 d'un intervalle J dans I. Alors,

$$\forall(\alpha, \beta) \in J^2 \quad \boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.} \tag{1}$$

Lorsque l'on remplace un membre de cette égalité par l'autre, on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$.
Démonstration à connaître.

Propriété. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une application continue sur $[-a, a]$.
Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\ dt = 2\int_0^a f(t)\ dt$. Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\ dt = 0$.

Théorème. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que f est une fonction continue et T-périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Alors, $\forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\int_0^T f(t)\ dt = \int_{t_0}^{T+t_0} f(t)\ dt$.
Démonstration à connaître.

2.2 Intégration par parties

Théorème. Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$.
Démonstration à connaître.

Théorème. Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Alors, $\displaystyle\int u(t)v'(t)\ dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\ dt,\ \ t \in I$.

Les ensembles

3 Ensembles et éléments

Axiome d'extensionnalité : Si E et F sont deux ensembles, alors
$E = F$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $x \in F$ et pour tout $x \in F$, $x \in E$.

Définition. $\{a\}$ est un singleton.
Lorsque $a \neq b$, $\{a, b\}$ est appelé une paire.

Définition. Un prédicat P sur un ensemble E est une application de E dans $\{V, F\}$, où V symbolise le vrai et F le faux.

Définition d'un ensemble en compréhension : Si E est un ensemble et P un prédicat sur E, alors $F = \{x \in E/P(x)\}$ est un ensemble.
De plus, pour tout $x \in E$, $x \in F \iff P(x)$.

Le paradoxe de Russell :
Notons A la collection de tous les ensembles et posons $B = \{x \in A/x \notin x\}$. Alors $B \in B$ si et seulement si $B \notin B$, ce qui est impossible. Cela signifie que A n'est pas un ensemble !
À connaître.

3.1 Quantificateurs

Définition du quantificateur universel :
Soit E un ensemble et P un prédicat sur E. La propriété "$\forall x \in E,\ P(x)$" signifie que pour tous les éléments x de E, $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E/P(x)\}$ est égal à E.

Définition du quantificateur existentiel :
Avec les mêmes notations, la propriété "$\exists x \in E,\ P(x)$" signifie qu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E/P(x)\} \neq \emptyset$.

Existence et unicité : La propriété "$\exists! x \in E,\ P(x)$" signifie qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie, c'est-à-dire que $\{x \in E/P(x)\}$ est un singleton.

Remarque. L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu : l'usage d'un "$\forall x$" est toujours suivi d'un "$\in E,\ P(x)$" (ou plus rarement d'un ", $P(x)$"), où P est un prédicat sur E.

Remarque. Soit P un prédicat sur un ensemble E. Alors dans les phrases
"$\forall x \in E,\ P(x)$" et "$\exists x \in E,\ P(x)$", on peut remplacer la variable x par y, ou n'importe quel autre symbole. On dit que, dans les phrases "$\forall x \in E,\ P(x)$" et "$\exists x \in E,\ P(x)$", x est une variable muette ou bien que c'est une variable liée.
Dans la propriété "$\exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$", y est une variable liée, et par opposition, on dit que x est une variable libre.

3.2 Parties d'un ensemble

Définition. Soit E et F deux ensembles.
On dit que F est inclus dans E et l'on note $F \subset E$ si et seulement si tout élément de F est un élément de E, c'est-à-dire si et seulement si $\forall x \in F,\ x \in E$.

Transitivité de l'inclusion : Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

Définition. Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

3.3 Opérateurs sur les ensembles

Définition. Soit E et F deux ensembles :
- **Intersection :** $x \in E \cap F$ si et seulement si ($x \in E$ et $x \in F$).
- **Réunion :** $x \in E \cup F$ si et seulement si ($x \in E$ ou $x \in F$).
- **Différence ensembliste :** $E \setminus F = \{x \in E / x \notin F\}$.
- **Différence symétrique :** $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$.
- **Complémentaire de F dans E :** Si F est une partie de E, le complémentaire de F dans E est $\overline{F} = E \setminus F$, que l'on note plus rarement $\complement_E^F$.

Propriété. Si F et G sont deux parties d'un ensemble E, alors $F \setminus G = F \cap \overline{G}$.

Propriété. ***Associativité de l'intersection et de la réunion*** : Soit A, B, C trois ensembles. Alors, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Définition. Soit I un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On définit $\bigcup_{i \in I} E_i$ et $\bigcap_{i \in I} E_i$ par :

$x \in \bigcup_{i \in I} E_i \Longleftrightarrow (\exists i \in I,\ \ x \in E_i)$ et $x \in \bigcap_{i \in I} E_i \Longleftrightarrow (\forall i \in I,\ \ x \in E_i)$.
Cette dernière définition n'est pas correcte lorsque $I = \emptyset$.

Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $\quad A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$.

Il faut savoir le démontrer.
Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\quad A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$ (avec $I \neq \emptyset$).

Notation. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles deux à deux disjoints, c'est-à-dire telle que, pour tout $i, j \in I$ avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.
Alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est appelée une réunion disjointe et elle est notée $\bigsqcup_{i \in I} E_i$.

4 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{N}$, satisfaisant les axiomes de Peano suivants :
- $\mathbb{N}$ est muni d'un élément particulier noté 0 et d'une application "successeur", notée s de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- 0 n'est le successeur d'aucun entier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ s(n) \neq 0$.
- s est une application injective : pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, si $s(n) = s(m)$, alors $n = m$.
- Pour toute partie F de $\mathbb{N}$, si $0 \in F$ et si pour tout $n \in F$, $s(n) \in F$, alors $F = \mathbb{N}$.

Principe de récurrence : Soit $R(n)$ un prédicat sur $\mathbb{N}$.
Si $R(0)$ est vraie et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ implique $R(s(n))$,
alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est vraie.

Addition entre entiers : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose
$0 + m = m$ et
$\forall n \in \mathbb{N},\ \ s(n) + m = s(n + m)$.
Ces conditions définissent l'addition entre entiers.

Propriétés de l'addition :
- 0 est neutre : $\forall m \in \mathbb{N},\ \ m + 0 = 0 + m = m$.
- Associativité : $\forall n, m, k \in \mathbb{N},\ \ (n + m) + k = n + (m + k)$.
- Commutativité : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \ n + m = m + n$.

5 Produit cartésien

Définition. Si a et b sont deux objets, posons $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$. On l'appellera le "couple de composantes a et b". Alors, $(a,b) = (c,d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Si A et B sont deux ensembles, on pose $A \times B = \{(a,b)/a \in A \text{ et } b \in B\}$.
$A \times B$ s'appelle le produit cartésien de A et B.

Définition. Un couple est aussi un 2-uplet. Pour $n \geq 3$, on définit récursivement la notion de n-uplet (ou n-liste) en écrivant : $(a_1,\dots,a_n) = ((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$.
Alors, $(a_1,\dots,a_n) = (b_1,\dots,b_n)$ si et seulement si $\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \ a_i = b_i$.

Notation. $\mathbb{N}^*$ désigne $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A_1,\dots,A_n$ sont n ensembles, on pose
$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,\dots,a_n)/\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \ a_i \in A_i\}$.
Si E est un ensemble, on note $E^n = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n fois}$.

Remarque. Convention, lorsque $n = 1$, le "1-uplet" (a) est égal à a.
Avec cette convention, $E^1 = E$.

Commutativité de deux quantificateurs universels :
Soit E et F deux ensembles. Notons $P(x,y)$ un prédicat défini sur $E \times F$. Alors

$$\begin{aligned}[\forall (x,y) \in E \times F,\ \ P(x,y)] &\iff [\forall x \in E,\ \ \forall y \in F,\ \ P(x,y)]\\ &\iff [\forall y \in F,\ \ \forall x \in E,\ \ P(x,y)]\end{aligned}$$

Commutativité de deux quantificateurs existentiels :De même,

$$\begin{aligned}[\exists (x,y) \in E \times F,\ \ P(x,y)] &\iff [\exists x \in E,\ \ \exists y \in F,\ \ P(x,y)]\\ &\iff [\exists y \in F,\ \ \exists x \in E,\ \ P(x,y)]\end{aligned}$$

ATTENTION :
Un quantificateur universel ne commute pas avec un quantificateur existentiel.
"$\forall x \in E,\ \ \exists y \in F,\ \ P(x,y)$" si et seulement si il existe une application
$x \longmapsto y(x)$ de E dans F tel que, pour tout $x \in E$, $P(x,y(x))$,
et "$\exists y \in F,\ \ \forall x \in E,\ \ P(x,y)$" si et seulement si il existe une application **constante**
$x \longmapsto y_0$ de E dans F, telle que pour tout $x \in E$, $P(x,y_0)$.
On voit qu'en général, la seconde affirmation implique la première mais que la réciproque est fausse.
À savoir exposer.

6 Formules propositionnelles

6.1 Syntaxe

Définition par induction des formules propositionnelles : on part d'un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont appelés des variables propositionnelles. On utilise également les "connecteurs logiques" suivants : $\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \neg$.
L'ensemble F des formules propositionnelles est défini par induction structurelle :

— Les variables propositionnelles sont des formules propositionnelles.
— si $P, Q \in F$, alors $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \Longrightarrow Q), (P \Longleftrightarrow Q)$ et $\neg P$ sont aussi des formules propositionnelles.

Plus précisément, si l'on note $F_0 = \mathcal{V}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$F_{n+1} = F_n \cup \{\neg P/P \in F_n\} \cup \{(P\alpha Q)/P, Q \in F_n \text{ et } \alpha \in \{\wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow\}\}$, alors $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Remarque. Une formule propositionnelle s'appelle aussi une proposition, une assertion, une formule, un énoncé, une expression booléenne, etc.

Définition. Si P et Q sont deux formules propositionnelles, $P \wedge Q$ (prononcer "P et Q") s'appelle la conjonction de P et de Q, $P \vee Q$ (prononcer "P ou Q") s'appelle la disjonction de P et de Q, $P \Longrightarrow Q$ s'appelle une implication, $P \Longleftrightarrow Q$ est une équivalence, et $\neg P$ est la négation de la proposition P.