

# DS 1 : L'énigme 2022

## Les calculatrices sont interdites.

En présentant ses voeux pour l'année 2022 à un ami, un mathématicien lui propose cette formule :  $\frac{2^{32}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{32i\theta} d\theta}{\cos \frac{\theta}{2} (2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2} = 2022$ . Mais depuis, mon ami doute de la validité de cette formule. Vrai ou faux, c'est l'objet de ce problème.

Pour ce problème, la notion de continuité pour une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est supposée connue. En particulier, on rappelle qu'une somme de fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est continue et que c'est aussi le cas pour un produit ou une composée de fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . De même, le quotient d'une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par une autre fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui ne s'annule pas est une fonction continue. On rappelle également que les applications  $\cos$  et  $\sin$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$ . Pour des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , la notion de continuité n'est pas supposée connue, elle est définie ci-dessous et toute propriété relative à la continuité de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  devra être établie avant d'être utilisée.

De même, pour ce problème, la notion d'intégrale et de primitive d'une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est supposée connue, ainsi que ses propriétés usuelles. Pour des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , ces notions ne sont pas supposées connues, elles sont définies ci-dessous et toute propriété relative à l'intégration ou à la primitivation d'une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  devra être établie avant d'être utilisée.

## Partie 1 : intégrales de fonctions à valeurs complexes

**Notation :** Lorsque  $z \in \mathbb{C}$ , on note  $\operatorname{Re}(z)$  la partie réelle de  $z$  et  $\operatorname{Im}(z)$  sa partie imaginaire.

**Définition :** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $a$  et  $b$ .

On suppose que  $f$  est une application de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si et seulement si les applications  $t \mapsto \operatorname{Re}(f(t))$  et  $t \mapsto \operatorname{Im}(f(t))$  sont continues sur  $I$ .

Dans ce cas, on pose  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ .

1°) Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , montrer que  $t \mapsto e^{int}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$ .

2°) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a, b \in I$ .

Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  et soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Montrer que  $t \mapsto f(t) + g(t)$  est continue de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  et que

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

Montrer que  $t \mapsto \alpha f(t)$  est continue de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  et que

$$\text{et que } \int_a^b (\alpha f(t) dt) = \alpha \int_a^b f(t) dt.$$

3°) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a, b \in I$ .

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tous  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ , pour toutes applications continues  $f_0, \dots, f_n$  de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \sum_{k=0}^n (\alpha_k f_k(t))$  est continue de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  et que

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n (\alpha_k f_k(t)) dt = \sum_{k=0}^n \left[ \alpha_k \int_a^b f_k(t) dt \right].$$

4°) Lorsque  $P$  est un polynôme à coefficients complexes, calculer  $\int_0^{2\pi} P(e^{it}) dt$  en fonction des coefficients de  $P$ .

5°) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

On suppose que pour tout  $t \in I$ ,  $g(t) \neq 0$ .

Montrer que  $t \mapsto \frac{f(t)}{g(t)}$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

6°) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a, b \in I$ .

Soit  $f$  une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ .

Montrer qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left( \int_a^b f(t) e^{-i\theta} dt \right)$ .

En déduire que  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$  (inégalité triangulaire).

## Partie 2 : intégrales sur le cercle unité

On pose  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ .  $\mathbb{U}$  est ainsi le cercle unité de  $\mathbb{C}$ .

Lorsque  $f$  est une application de  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $t \mapsto f(e^{it})$  est une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , on pose

$$\int_{\mathbb{U}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) ie^{it} dt.$$

On dit que  $\int_{\mathbb{U}} f(z) dz$  est l'intégrale de  $f$  sur le cercle unité.

7°) Lorsque  $f$  est un polynôme à coefficients complexes, montrer que  $\int_{\mathbb{U}} f(z) dz = 0$ .

8°) Soit  $r \in \mathbb{C}$  tel que  $r \neq 1$ . Montrer que, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$ .

9°) Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $|z_0| < 1$ .

Montrer que, pour tout  $z \in \mathbb{U}$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^N \frac{z_0^n}{z^{n+1}} + \frac{(\frac{z_0}{z})^{N+1}}{z - z_0}$ .

Montrer qu'il existe  $R_N \in \mathbb{C}$  tel que  $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi + R_N$  avec  $|R_N| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ .

On admettra que ceci prouve que  $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi$ .

10°) Lorsque  $z_0$  est un complexe tel que  $|z_0| > 1$ , que vaut  $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0}$  ?

### Partie 3 : Étude d'un polynôme

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $D(z) = 4z^3 - 2z^2 - z + 1$ .

11°) En étudiant les variations de l'application  $D$  restreinte à  $\mathbb{R}$ , montrer que  $D$  possède une unique racine réelle.

Pour toute la suite du problème, on notera  $z_1$  l'unique racine réelle de  $D$ .

12°) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^n - z_1^n = (z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k}.$$

En déduire qu'il existe un polynôme  $P$  de degré 2 à coefficients réels tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $D(z) = (z - z_1)P(z)$ .

Montrer que  $D$  possède 2 racines distinctes, complexes et non réelles, notées  $z_2$  et  $z_3$  telles que  $z_3 = \bar{z}_2$ .

13°) Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , montrer que  $|z_i| \leq 1$ .

14°) Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , montrer que  $|z_i| < 1$ .

Pour toute la suite du problème, on pose  $I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{32i\theta} d\theta}{\cos \frac{\theta}{2} (2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2}$

15°) Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , exprimer  $\cos \frac{\theta}{2} (2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2$  en fonction de  $D$  et de  $e^{i\theta}$ .

En déduire que  $I$  est correctement définie et mettre  $I$  sous la forme  $I = \int_{\mathbb{U}} f(z) dz$ , en précisant l'application  $f$ .

## Partie 4 : fin du calcul

**16°)** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  à coefficients réels et 3 réels  $a_n, b_n$  et  $c_n$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^n = P_n(z)D(z) + a_n z^2 + b_n z + c_n$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $a_{n+1}, b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n$  et  $c_n$ .

**17°)** Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$  tels que,

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \frac{az^2 + bz + c}{D(z)} = \frac{\alpha_1}{z - z_1} + \frac{\alpha_2}{z - z_2} + \frac{\alpha_3}{z - z_3}.$$

**18°)** On admettra que  $a_{34} = -\frac{1011}{2^{31}}$ , ce que l'on obtient assez facilement à partir des relations de la question 16 avec l'aide d'un ordinateur.  
Conclure.