DS 1 : Un corrigé

Le barème comporte un total de 50 points.

Partie 1 : intégrales de fonctions à valeurs complexes (sur 12 points)

1°) (sur 2 points)
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(e^{int}) = \cos(nt)$ et $\mathrm{Im}(e^{int}) = \sin(nt)$, donc d'après l'énoncé, les applications $t \longmapsto \mathrm{Re}(e^{int})$ et $t \longmapsto \mathrm{Im}(e^{int})$ sont continues. Ainsi, d'après la définition de l'énoncé, l'application $t \longmapsto e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$\diamond$ D'après la définition de l'énoncé, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\, dt + i \int_0^{2\pi} \sin(nt)\, dt$.
Lorsque $n \neq 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = \Big[\frac{\sin(nt)}{n}\Big]_0^{2\pi} - i\Big[\frac{\cos(nt)}{n}\Big]_0^{2\pi}$,
donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = 0 \text{ lorsque } n \neq 0}$.
Lorsque $n = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{int} = 1$, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = 2\pi \text{ lorsque } n = 0}$.

2°) $\diamond$ (sur 2 points) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $f_r(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $f_i(t) = \mathrm{Im}(f(t))$.
De même, pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $g_r(t) = \mathrm{Re}(g(t))$ et $g_i(t) = \mathrm{Im}(g(t))$.
Alors $\mathrm{Re}(f(t) + g(t)) = f_r(t) + g_r(t)$ et $\mathrm{Im}(f(t) + g(t)) = f_i(t) + g_i(t)$.
Ainsi, d'après les théorèmes usuels, $t \longmapsto (f(t) + g(t))$ est continue.
De plus, d'après la linéarité des intégrales de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt &= \int_a^b (f_r(t) + g_r(t))\, dt + i \int_a^b (f_i(t) + g_i(t))\, dt \\ &= \Big(\int_a^b f_r(t)\, dt + i\int_a^b f_i(t)\, dt\Big) + \Big(\int_a^b g_r(t)\, dt + i \int_a^b g_i(t)\, dt\Big) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt.\end{aligned}$$

$\diamond$ (sur 1 point) Posons $\alpha_r = \mathrm{Re}(\alpha)$ et $\alpha_i = \mathrm{Im}(\alpha)$.
Alors $\mathrm{Re}(\alpha f(t)) = \alpha_r f_r(t) - \alpha_i f_i(t)$ et $\mathrm{Im}(\alpha f(t)) = \alpha_r f_i(t) + \alpha_i f_r(t)$, donc toujours d'après la définition de l'énoncé, $t \longmapsto \alpha f(t)$ est continue et

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(t))\ dt &= \int_a^b (\alpha_r f_r(t) - \alpha_i f_i(t))\ dt + i\int_a^b (\alpha_r f_i(t) + \alpha_i f_r(t))\ dt \\ &= (\alpha_r + i\alpha_i)\Big(\int_a^b f_r(t)\ dt + i\int_a^b f_i(t)\ dt\Big) \\ &= \alpha \int_a^b f(t)\ dt.\end{aligned}$$

3°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
pour tous $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, pour toutes applications continues $f_0, \ldots, f_n$ de I dans $\mathbb{C}$, $t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k f_k(t))$ est continue de I dans $\mathbb{C}$ et $\int_a^b \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k f_k(t))\ dt = \sum_{k=0}^{n} \Big[\alpha_k \int_a^b f_k(t)\ dt\Big]$.
La question précédente prouve $R(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $R(n)$ est vraie.
Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ et soit $n+1$ applications continues $f_0, \ldots, f_{n+1}$ de I dans $\mathbb{C}$. Posons, pour tout $t \in I$, $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k(t)$.

Alors, pour tout $t \in I$, $\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t) = f(t) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(t)$, donc d'après la question précédente, $t \longmapsto \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k f_k(t)$ est continue. De plus, toujours d'après la question précédente, $\int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha_k f_k(t))\ dt = \int_a^b (f(t) + \alpha_{n+1} f_{n+1}(t))\ dt = \int_a^b f(t) + \alpha_{n+1} \int_a^b f_{n+1}(t)\ dt$,

puis d'après $R(n)$, $\int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha_k f_k(t))\ dt = \Big(\sum_{k=0}^{n} \Big[\alpha_k \int_a^b f_k(t)\ dt\Big]\Big) + \alpha_{n+1} \int_a^b f_{n+1}(t)\ dt$,

donc $\int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} (\alpha_k f_k(t))\ dt = \sum_{k=0}^{n+1} \Big[\alpha_k \int_a^b f_k(t)\ dt\Big]$. Ceci prouve $R(n+1)$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est vrai.

4°) (sur 1 point) Soit P un polynôme à coefficients complexes. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{ikt}$, donc $t \longmapsto P(e^{it})$ est continue d'après les questions 1 et 3 et $\int_0^{2\pi} P(e^{it})\ dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{ikt}\ dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_0^{2\pi} e^{ikt}\ dt$. Alors, d'après la première question, $\int_0^{2\pi} P(e^{it})\ dt = 2\pi\alpha_0$.

5°) (sur 1 point) On reprend les notations définies en début de question 2.

Alors, pour tout $t \in I$, $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{f(t)\overline{g(t)}}{|g(t)|^2} = \dfrac{(f_r(t)+if_i(t))(g_r(t)-ig_i(t))}{g_r^2(t)+g_i^2(t)}$,

donc $\mathrm{Re}\Big(\dfrac{f(t)}{g(t)}\Big) = \dfrac{f_r(t)g_r(t)+f_i(t)g_i(t)}{g_r^2(t)+g_i^2(t)}$ et $\mathrm{Im}\Big(\dfrac{f(t)}{g(t)}\Big) = \dfrac{f_i(t)g_r(t)-f_r(t)g_i(t)}{g_r^2(t)+g_i^2(t)}$. Ainsi, d'après le cours sur les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les applications $t \longmapsto \mathrm{Re}\Big(\dfrac{f(t)}{g(t)}\Big)$ et $t \longmapsto \mathrm{Im}\Big(\dfrac{f(t)}{g(t)}\Big)$ sont continues. ce qui prouve que $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{g(t)}$ est une application continue de I dans $\mathbb{C}$.

6°) $\diamond$ (sur 1 point) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est un complexe, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = e^{i\theta}\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big|$. Alors d'après la question 2, $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = \int_a^b f(t)e^{-i\theta}\,dt$.

Prenons la partie réelle de cette égalité : $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = \mathrm{Re}\Big(\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big|\Big) = \mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)e^{-i\theta}\,dt\Big)$.

$\diamond$ (sur 2 points) Or d'après l'énoncé, $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{-i\theta}\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t)e^{-i\theta})\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t)e^{-i\theta})\,dt$,

donc $\displaystyle\mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)e^{-i\theta}\,dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t)e^{-i\theta})\,dt$.

Ainsi, on a prouvé que $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t)e^{-i\theta})\,dt$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Alors $\mathrm{Re}(z) = a \le |a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2+b^2} = |z|$, donc par croissance de l'intégrale de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t)e^{-i\theta})\,dt \le \int_a^b |f(t)e^{-i\theta}|\,dt$ (l'application $t \longmapsto |f(t)e^{-i\theta}|$ est bien continue de I dans $\mathbb{R}$, car pour tout $t \in I$, $|f(t)e^{-i\theta}| = |f(t)| = \sqrt{\mathrm{Re}(f(t))^2 + \mathrm{Im}(f(t))^2}$).

Finalement, $\displaystyle\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t)e^{-i\theta})\,dt \le \int_a^b |f(t)e^{-i\theta}|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Partie 2 : intégrales sur le cercle unité (sur 12 points)

(sur 1 point) Soit f une application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $t \longmapsto f(e^{it})$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $f(t)ie^{it} = \dfrac{f(t)}{-ie^{-it}}$, donc d'après la question 5, $t \longmapsto f(t)ie^{it}$ est continue ce qui prouve que la définition de $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} f(z)\,dz$ est correcte.

7°) (sur 1 point) Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $ie^{it}f(e^{it}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} i\alpha_k e^{i(k+1)t}$.

Alors, d'après la question 4, $\displaystyle\int_0^{2\pi} ie^{it}f(e^{it})\,dt$ est bien définie et vaut 0. En conclusion, on a montré que $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{U}} f(z)\,dz = 0}$.

8°) (sur 1 point) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $(1-r)\displaystyle\sum_{n=0}^{N} r^n = \sum_{n=0}^{N} r^n - \sum_{n=0}^{N} r^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} r^n - \sum_{n=1}^{N+1} r^n$,

donc $(1-r)\displaystyle\sum_{n=0}^{N} r^n = r^0 + \sum_{n=1}^{N} r^n - r^{N+1} - \sum_{n=1}^{N} r^n = 1 - r^{N+1}$, ce qu'il fallait démontrer, car $1-r \neq 0$.

9°) $\diamond$ (sur 1 point) Soit $z \in \mathbb{U}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. $z_0 \notin \mathbb{U}$, donc $\dfrac{z_0}{z} \neq 1$.
Ainsi, d'après la question précédente,
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n = \frac{1-(\frac{z_0}{z})^{N+1}}{1-\frac{z_0}{z}}$, donc $\dfrac{1}{z-z_0} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{1}{1-\frac{z_0}{z}} = \dfrac{1}{z}\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\frac{(\frac{z_0}{z})^{N+1}}{1-\frac{z_0}{z}}$.

Ainsi, on a bien montré que $\dfrac{1}{z-z_0} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} + \frac{(\frac{z_0}{z})^{N+1}}{z-z_0}$.

$\diamond$ (sur 4 points) Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question 2, les applications $t \longmapsto ie^{it}$ et $t \longmapsto e^{it} - z_0$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, donc d'après la question 5, l'application $t \longmapsto \dfrac{ie^{it}}{e^{it}-z_0}$ est également continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi, la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0}$ est bien définie.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}-z_0} = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{iz_0^n}{e^{int}} + \frac{iz_0^{N+1}e^{-iNt}}{e^{it}-z_0}\right) dt$, puis

d'après la question 3, $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{N} iz_0^n \int_0^{2\pi} e^{-int}dt + R_N$, où $R_N = iz_0^{N+1}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{-iNt}\,dt}{e^{it}-z_0}$.

D'après la question 1, on en déduit que $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi + R_N$. De plus, d'après la question 6, $|R_N| \leq |z_0|^{N+1}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{e^{-iNt}}{e^{it}-z_0}\right| dt = |z_0|^{N+1}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-z_0|} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $|z_0| < 1$ et car $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-z_0|}$ ne dépend pas de N.

Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $|R_N| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10°) (sur 4 points)
On suppose maintenant que $|z_0| > 1$. Adaptons la question précédente.
$\diamond$ Soit $z \in \mathbb{U}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. $z_0 \notin \mathbb{U}$ et $z_0 \neq 0$, donc $\dfrac{z}{z_0} \neq 1$. Ainsi, d'après la question 8,

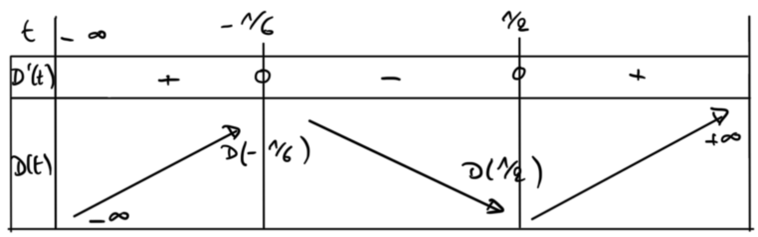
$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{1-(\frac{z}{z_0})^{N+1}}{1-\frac{z}{z_0}}$, donc $\dfrac{1}{z-z_0} = -\dfrac{1}{z_0} \times \dfrac{1}{1-\frac{z}{z_0}} = -\dfrac{1}{z_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n - \frac{1}{z_0}\frac{(\frac{z}{z_0})^{N+1}}{1-\frac{z}{z_0}}$.

Ainsi $\dfrac{1}{z-z_0} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{z_0^{n+1}} + \frac{\left(\frac{z}{z_0}\right)^{N+1}}{z-z_0}$.

$\diamond$ De même que pour la question précédente, on montre que la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0}$ est bien définie. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors
$\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}-z_0} = \int_0^{2\pi} \Big(-\sum_{n=0}^{N} \frac{ie^{i(n+1)t}}{z_0^{n+1}} + \frac{ie^{i(N+2)t}}{z_0^{N+1}(e^{it}-z_0)} \Big)\, dt$, puis d'après la question 3, $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{i}{z_0^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt + R_N$, où $R_N = \dfrac{i}{z_0^{N+1}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(N+2)t}\,dt}{e^{it}-z_0}$.
D'après la question 1, on en déduit que $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = R_N$. De plus, d'après la question 6, $|R_N| \leq \Big(\dfrac{1}{|z_0|}\Big)^{N+1} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-z_0|} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\dfrac{1}{|z_0|} < 1$.
On en déduit donc que, lorsque $|z_0| > 1$, $\boxed{\displaystyle\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z-z_0} = 0}$.

Partie 3 : Étude d'un polynôme (sur 17 points)

11°) (sur 3 points) D est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D'(t) = 12t^2 - 4t - 1$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est
$\Delta = 16 + 4 \times 12 = 64 = 8^2$, donc les racines de D' sont
$t_0 = \dfrac{4+8}{24} = \dfrac{1}{2}$ et $t_1 = \dfrac{4-8}{24} = -\dfrac{1}{6}$.
De plus, $D(t) = t^3(4 - 2\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3})$, donc $D(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $D(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
On peut alors représenter le tableau de variations de D :



On calcule $D(\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{8} - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$, donc d'après le tableau de variations, D s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ en un réel $z_1 \in]-\infty, -\frac{1}{6}]$.

12°) $\diamond$ (sur 1 points) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$(z-z_1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} z_1^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-k}$,

or en posant $h = k+1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} z_1^{n-1-k} = \sum_{h=1}^{n} z^h z_1^{n-h}$,

donc $(z - z_1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-1} z^k z_1^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} z^k z_1^{n-k} + z^n - z_1^n$,

donc $(z - z_1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = z^n - z_1^n$.

$\diamond$ (sur 1 point) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} D(z) &= D(z) - D(z_1) \\ &= 4(z^3 - z_1^3) - 2(z^2 - z_1^2) - (z - z_1) \\ &= (z - z_1)(4(z^2 + zz_1 + z_1^2) - 2(z + z_1) - 1) \\ &= (z - z_1)P(z), \end{aligned}$$

où P est un polynôme à coefficients réels de degré 2.

$\diamond$ (sur 3 points) Les racines de P sont des racines de D, donc P n'admet pas deux racines réelles distinctes. Ainsi, en notant Δ son discriminant, $\Delta \le 0$. Posons $\delta = \sqrt{-\Delta}$ et notons

$P = (z \longmapsto az^2 + bz + c)$.

Alors on sait que les racines de P sont $z_2 = \dfrac{-b + i\delta}{2a}$ et $z_3 = \dfrac{-b - i\delta}{2a}$.

Supposons que $\delta = 0$. Alors $z_2 = z_3 \in \mathbb{R}$ et z_2 est une racine réelle de D,
donc $z_1 = z_2 = z_3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 4(t - z_1)^2$,
puis $D(t) = (t - z_1)P(t) = 4(t - z_1)^3$. En particulier, $D'(t) = 12(t - z_1)^2$, donc z_1 est l'unique racine de D', ce qui est faux. Ainsi, $\delta \neq 0$.
Ainsi, z_2 et z_3 sont complexes, non réelles et distinctes, et $z_3 = \overline{z_2}$.

13°) (sur 2 points) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $D(z) = 0$. Supposons que $|z| > 1$.
On a $4z^3 = 2z^2 + z - 1$, donc en passant au module et en utilisant l'inégalité triangulaire, $4|z|^3 \le 2|z|^2 + |z| + 1$, or $|z| > 1$, donc $2|z|^2 + |z| + 1 < 2|z|^3 + |z|^3 + |z|^3 = 4|z|^3$.
On en déduit que $4|z|^3 < 4|z|^3$ ce qui est impossible.
Ainsi, on a montré par l'absurde que $|z| \le 1$, pour toute racine z de D.

14°) (sur 3 points) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $D(z) = 0$. On sait déjà que $|z| \le 1$. Supposons que $|z| = 1$. Alors, en reprenant le raisonnement de la question précédente,
$4 = |4z^3| = |2z^2 + z - 1| \le |2z^2| + |z - 1| \le |2z^2| + |z| + 1 = 4$, donc toutes ces inégalités sont des égalités. En particulier, $|z - 1| = |z| + 1$, donc on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire entre deux complexes. D'après le cours de Terminale (mathématiques expertes), z et -1 sont sur la même demi-droite issue de l'origine. Or $|z| = 1$, donc $z = -1$. C'est impossible car $D(-1) = -4 - 2 + 1 + 1 \neq 0$. Ainsi, les racines du polynôme D sont des complexes z tels que $|z| < 1$.

15°) $\diamond$ (sur 2 points) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $2\cos\frac{\theta}{2} = e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}$, donc

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{\theta}{2}(2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2 &= \tfrac{1}{2}(2e^{-i\theta} - e^{-2i\theta} + 2e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) - 2 \\ &= -\tfrac{1}{2}e^{-3i\theta}(4e^{3i\theta} - 2e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1) \\ &= -\tfrac{1}{2}(e^{i\theta})^{-3}D(e^{i\theta}). \end{aligned}$$

$\diamond$ (sur 2 points) D'après la question précédente, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $D(e^{i\theta}) \neq 0$, donc $\theta \longmapsto \cos\frac{\theta}{2}(2e^{-\frac{3}{2}i\theta} - e^{-\frac{5}{2}i\theta}) - 2$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui ne s'annule jamais. Ses parties réelle et imaginaire sont clairement continues, donc elle est continue. De même, l'application $\theta \longmapsto e^{32i\theta}$ est continue, donc d'après la question 5, I est bien définie en tant qu'intégrale entre 0 et 2π d'une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
$\diamond$ De plus, d'après le calcul précédent,
$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{-2e^{35i\theta}\, d\theta}{D(e^{i\theta})} = \int_{\mathbb{U}} f(z)\, dz$, en posant, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\boxed{f(z) = \dfrac{2iz^{34}}{D(z)}}$.

Partie 4 : fin du calcul (sur 9 points)

16°) (sur 3 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : il existe un polynôme P_n à coefficients réels et 3 réels a_n, b_n et c_n tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$z^n = P_n(z)D(z) + a_n z^2 + b_n z + c_n$.
Pour $n = 0$, on a $z^0 = 1 = 0.D(z) + 1$, donc $R(0)$ est vraie en choisissant $P_0 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $R(n)$ est vraie. Soit $z \in \mathbb{C}$.
On a $z^{n+1} = z \times z^n = zP_n(z)D(z) + a_n z^3 + b_n z^2 + c_n z$,
or $z^3 = \frac{1}{4}(D(z)+2z^2+z-1)$, donc $z^{n+1} = (zP_n(z)+\frac{a_n}{4})D(z)+(\frac{a_n}{2}+b_n)z^2+(\frac{a_n}{4}+c_n)z-\frac{a_n}{4}$, donc on a prouvé $R(n+1)$ en posant $P_{n+1}(z) = zP_n(z) + \frac{a_n}{4}$, qui est bien un polynôme à coefficients réels, $\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n}{4} + c_n \text{ et } c_{n+1} = -\frac{a_n}{4}}$.

17°) (sur 3 points) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. En réduisant au même dénominateur, $\dfrac{\alpha_1}{z - z_1} + \dfrac{\alpha_2}{z - z_2} + \dfrac{\alpha_3}{z - z_3}$ est égal à
$\dfrac{\alpha_1(z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2z_3) + \alpha_2(z^2 - (z_1 + z_3)z + z_1z_3) + \alpha_3(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$, or
d'après la question 12, $D(z) = 4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ conviennent lorsque, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c \ = 4[\ & (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)z^2 \\ & -(\alpha_1(z_2 + z_3) + \alpha_2(z_1 + z_3) + \alpha_3(z_1 + z_2))z \\ & +\alpha_1 z_2z_3 + \alpha_2 z_1z_3 + \alpha_3 z_1z_2\ ]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ conviennent, il suffit qu'ils soient solution du système suivant :

$$(S)\ :\ \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{a}{4} \\ \alpha_1(z_2 + z_3) + \alpha_2(z_1 + z_3) + \alpha_3(z_1 + z_2) = -\frac{b}{4} \\ \alpha_1 z_2z_3 + \alpha_2 z_1z_3 + \alpha_3 z_1z_2 = \frac{c}{4} \end{cases}$$

Notons $(1), (2)$ et (3) ces trois équations.
Notons $(1)'$ l'équation $(z_1 + z_2)(1) - (2)$,
c'est-à-dire $(1)'\ :\ \alpha_1(z_1 - z_3) + \alpha_2(z_2 - z_3) = (z_1 + z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}$
et de même, notons $(2)'$ l'équation $z_1z_2(1) - (3)$,
c'est-à-dire $(2)'\ :\ \alpha_1 z_2(z_1 - z_3) + \alpha_2 z_1(z_2 - z_3) = z_1z_2\frac{a}{4} - \frac{c}{4}$.
Comme $(2) = (z_1 + z_2)(1) - (1)'$ et $(3) = z_1z_2(1) - (2)'$,
on voit que $(S) \Longleftrightarrow ((1)', (2)', (1))$.
Or $(1)'z_1 - (2)'$ donne $\alpha_1(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = z_1((z_1 + z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}) - z_1z_2\frac{a}{4} + \frac{c}{4}$.

Or $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \neq 0$, donc

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha_1 &= \dfrac{z_1((z_1+z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}) - z_1 z_2 \frac{a}{4} + \frac{c}{4}}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)} \\ \alpha_2 &= \dfrac{-\alpha_1(z_1 - z_3) + (z_1+z_2)\frac{a}{4} + \frac{b}{4}}{z_2 - z_3} \\ \alpha_3 &= \frac{a}{4} - \alpha_1 - \alpha_2. \end{cases}$$

Ceci prouve que le système (S) possède un triplet solution $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pour lequel on a donc que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, $\dfrac{az^2 + bz + c}{D(z)} = \dfrac{\alpha_1}{z - z_1} + \dfrac{\alpha_2}{z - z_2} + \dfrac{\alpha_3}{z - z_3}$.

18°) (sur 3 points)

D'après la question 16, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $f(z) = 2iP_{34}(z) + 2i\dfrac{a_{34}z^2 + b_{34}z + c_{34}}{D(z)}$, donc, en utilisant la définition de $\displaystyle\int_{\mathbb{U}} f(z)\, dz$ et la question 2,

$I = 2i\displaystyle\int_{\mathbb{U}} P_{34}(z)\, dz + 2i\int_{\mathbb{U}} \frac{a_{34}z^2 + b_{34}z + c_{34}}{D(z)}\, dz$. D'après la question 7, le premier terme est nul. De plus, d'après la question précédente, il existe des complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que (C) : $\dfrac{a_{34}z^2 + b_{34}z + c_{34}}{D(z)} = \dfrac{\alpha_1}{z - z_1} + \dfrac{\alpha_2}{z - z_2} + \dfrac{\alpha_3}{z - z_3}$. Or z_1, z_2 et z_3 ont tous un module strictement inférieur à 1, donc d'après la question 9,

$I = 2i \times (2i\pi) \times (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

Dans la condition (C), on remplace z par $t \in \mathbb{R}$ et on multiplie par t :

$\dfrac{a_{34}t^3 + b_{34}t^2 + c_{34}t}{4t^3 - 2t^2 - t + 1} = \dfrac{\alpha_1 t}{t - z_1} + \dfrac{\alpha_2 t}{t - z_2} + \dfrac{\alpha_3 t}{t - z_3}$, ce qui s'écrit aussi, pour $t \neq 0$:

$\dfrac{a_{34} + b_{34}\frac{1}{t} + c_{34}\frac{1}{t^2}}{4 - 2\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}} = \dfrac{\alpha_1}{1 - \frac{z_1}{t}} + \dfrac{\alpha_2}{1 - \frac{z_2}{t}} + \dfrac{\alpha_3}{1 - \frac{z_3}{t}}$,

donc en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient que $\dfrac{a_{34}}{4} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Finalement, $I = -\pi a_{34} = \dfrac{1011\pi}{2^{31}}$ et il est bien vrai que $\dfrac{2^{32}}{\pi} I = 2022$.