Feuille d'exercices 3.
Ensembles et logique.

Théorie des ensembles

Exercice 3.1 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A, B, D trois parties de E. Démontrer que :

1. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$;
2. $A \setminus (B \cap D) = (A \setminus B) \cup (A \setminus D)$;
3. $A \setminus (B \cup D) = (A \setminus B) \cap (A \setminus D)$;
4. $(A \cup B) \cap (B \cup D) \cap (D \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap D) \cup (D \cap A)$.

Exercice 3.2 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

1°) Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

2°) Démontrer qu'en général la première inclusion ci-dessus n'est pas une égalité.

3°) Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si et seulement si, $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Exercice 3.3 : (niveau 1)

Soient A, B, C et D quatre ensembles.

1°) Démontrer que $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

2°) Comparer les ensembles $(A \times C) \cap (B \times D)$ et $(A \cap B) \times (C \cap D)$.

Exercice 3.4 : (niveau 1)

Soit A et B deux ensembles.

1°) Montrer que $A \Delta B = A \cap B$ si et seulement si $A = B = \emptyset$.

2°) Montrer que $A \Delta B = \emptyset$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 3.5 : (niveau 2)
Soient E un ensemble, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $(A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ une famille de parties de E. On pose

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} A_{i,j} \quad \text{et} \quad V = \bigcap_{j=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j}.$$

1°) Déterminer une inclusion liant U et V .
Démontrer qu'en général cette inclusion est stricte.

2°) On suppose que :

$$\forall i_1, i_2 \in [\![1, n]\!], \ \forall j_1, j_2 \in [\![1, m]\!], \ (i_1 \neq i_2) \Longrightarrow (A_{i_1,j_1} \cap A_{i_2,j_2} = \emptyset).$$

Démontrer que $U = V$.

Exercice 3.6 : (niveau 2)
On considère un ensemble E et deux parties A et B de E.

1°) Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$: $X \cup A = B$.

2°) En déduire les solutions de l'équation $X \cap A = B$.

3°) En déduire les solutions de l'équation $X \setminus A = B$.

Exercice 3.7 : (niveau 2)
On admet ici que, pour tout ensemble x, $x \notin x$.

1°) Soit b un ensemble. Résoudre l'équation (E) : $\{a\} \in \{a, b\}$.

2°) De même, résoudre les équations $a \subset \{a\}$ et $a \subset \{a, b\}$, où l'inconnue a est un ensemble.

Exercice 3.8 : (niveau 2)
Soit E un ensemble non vide. Pour toutes parties A et B de E, on appelle différence symétrique de A et B la partie de E notée $A\Delta B$ définie par

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1°) Justifier l'égalité affirmée par la définition ci-dessus.

2°) Montrer que l'opération Δ est commutative et associative.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des parties de E.
Montrer que $x \in A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_n$ si et seulement si le cardinal de
$\{i \in \{1, \ldots, n\}/x \in A_i\}$ est impair.

Exercice 3.9 : (niveau 3)

Si A est un ensemble muni d'une loi interne $*$, c'est-à-dire d'une application $\begin{array}{ccc} A\times A & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & x*y \end{array}$, on dit que $(A,*)$ est un monoïde si et seulement si

— $\forall x,y,z\in A,\ \ x*(y*z)=(x*y)*z$

— et s'il existe $e\in A$ tel que $\forall x\in A,\ \ x*e=e*x=x$. Dans ce cas, on dit que e est l'élément neutre de A.

On considère un monoïde $(G,*)$ dont l'élément neutre est noté e.

1°) Si H est une partie de G, à quelle condition H est-il un monoïde pour la restriction de "$*$" à H, dont l'élément neutre est aussi e ? Dans ce cas, on dit que H est un sous-monoïde de G.

2°) Soit I un ensemble non vide quelconque et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-monoïdes de G. Montrer que $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est aussi un sous-monoïde de G.

3°) Soit B une partie quelconque de G. Montrer qu'on peut définir le plus petit sous-monoïde de G contenant B, que l'on notera $M(B)$.

4°) Montrer que $M(B)=\{x_1*\cdots*x_n\ /\ n\in\mathbb{N},\ \ x_1,\ldots,x_n\in B\}$, en convenant que $x_1*\cdots*x_n=e$ lorsque $n=0$.

Exercice 3.10 : (niveau 3)

On se place dans le cadre de la théorie des ensembles, pour laquelle tout objet mathématique est un ensemble.

1°) On admet l'axiome suivant :
Axiome de fondation : Pour tout ensemble x non vide, il existe $y\in x$ tel que $y\cap x=\emptyset$.
Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il n'existe aucune suite d'ensembles $x_1,\ldots,x_n$ tels que $x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_1$.

2°) Posons $0=\emptyset$.
Pour tout ensemble a, notons $s(a)=a\cup\{a\}$.
On dira qu'un ensemble a est clos par successeur si et seulement si $\forall x\in a,\ \ s(x)\in a$.
On admet l'*axiome de l'infini :* il existe un ensemble M dont 0 est un élément et qui est clos par successeur.
On note N l'intersection des parties de M contenant 0 et closes par successeur.
Montrer que N satisfait les axiomes de Peano que l'on rappelle :

— N est muni d'un élément particulier noté 0 et d'une application "successeur", notée s de N dans N.

— 0 n'est le successeur d'aucun élément de N : $\forall n\in N,\ \ s(n)\neq 0$.

— s est une application injective : $\forall n,m\in N,\ \ s(n)=s(m)\Longrightarrow n=m$.

— Pour toute partie F de N, si $0\in F$ et $s(F)\subset F$ (i.e $\forall n\in N$, $n\in F\Longrightarrow s(n)\in F$), alors $F=N$.

Exercice 3.11 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des ensembles.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On note P_k l'ensemble des parties de cardinal k de $\{1, \ldots, n\}$.

1°) Si $k \leq \frac{n+1}{2}$, montrer que $\displaystyle\bigcap_{H \in P_k} \bigcup_{i \in H} X_i \subset \bigcup_{H \in P_k} \bigcap_{i \in H} X_i$.

2°) Si $k \geq \frac{n+1}{2}$, montrer que $\displaystyle\bigcup_{H \in P_k} \bigcap_{i \in H} X_i \subset \bigcap_{H \in P_k} \bigcup_{i \in H} X_i$.

Logique

Exercice 3.12 : (niveau 1)

Montrer de deux manières différentes que les formules propositionnelles suivantes sont des tautologies.
$\neg A \Longrightarrow (\neg B \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow A))$,
$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (((A \Longrightarrow C) \Longrightarrow B) \Longrightarrow B)$.

Exercice 3.13 : (niveau 1)

Les lettres P et Q désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x, compléter à l'aide des symboles $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, les propriétés mathématiques suivantes, afin qu'elles soient toujours vraies.

— $(\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \ \ldots\ (\forall x \in E,\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x))$,
— $(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \ \ldots\ (\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x))$,
— $(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \ \ldots\ (\forall x \in E,\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x))$,
— $(\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \ \ldots\ (\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x))$.

Exercice 3.14 : (niveau 1)

Montrer de deux manières différentes que les formules propositionnelles suivantes sont logiquement équivalentes :
$A \Longrightarrow (B \wedge C)$ et $(A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longrightarrow C)$,
$(A \vee B) \Longrightarrow C$ et $(A \Longrightarrow C) \wedge (B \Longrightarrow C)$,
$(A \wedge B) \Longrightarrow C$ et $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$.

Exercice 3.15 : (niveau 1)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1°) Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
2. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ;
3. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;
4. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante ;
5. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang) ;
6. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2. Inversement, traduire en langage "clair" les assertions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ \ u_p = 0$;
2. $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n, u_p < u_n$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n, u_p \neq u_n$.

Exercice 3.16 : (niveau 2)

Alice, Bruno et Camille sont au restaurant.

— Si Alice ne prend pas de dessert, Bruno non plus ;
— parmi Alice et Camille, exactement une personne prend un dessert ;
— si Camille prend un dessert, Bruno aussi ;
— Bruno ou Camille prennent un dessert.

Déterminer, parmi Alice, Bruno et Camille, ceux qui prennent un dessert.

Exercice 3.17 : (niveau 2)

Dans cet énoncé, la négation d'une formule propositionnelle P sera notée indifféremment $\neg P$ ou $\overline{P}$.

1°) La barre de Scheffer, notée "|", est le connecteur logique défini par :
Pour toute formule propositionnnelle P et Q, $(P|Q)$ est logiquement équivalente à $(\overline{P} \vee \overline{Q})$.
Montrer que l'on peut dire que la barre de Scheffer est le connecteur logique "est incompatible avec".

2°) Exprimer les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, et $\Longrightarrow$ en utilisant uniquement la barre de Scheffer.

Exercice 3.18 : (niveau 2)

Écrire les négations logiques des trois phrases suivantes :

1°) Dans chaque devoir surveillé, il y a toujours une question qu'aucun élève ne sait résoudre.

2°) Pour être admissible aux Mines en 2022, il suffisait d'avoir au moins 177 points à la barre scientifique et 363 points à la barre générale.

3°) L'an dernier en MPSI2, certains élèves ont eu au moins 12 à toutes leurs colles de maths.

Exercices supplémentaires

Théorie des ensembles

Exercice 3.19 : (niveau 1)

Considérons trois parties A, B et C d'un ensemble E telles que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrez que $B \subset C$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 3.20 : (niveau 1)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Résoudre l'équation
$(E)\ :\ (A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \emptyset$, en l'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 3.21 : (niveau 1)

Soit E un ensemble, I un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties de E telles que, pour tout $i \in I$, $E = A_i \cup B_i$.
Montrer que $E = \Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcap\limits_{i \in I} B_i\Big)$.

Exercice 3.22 : (niveau 1)

On dit qu'un ensemble E est transitif si et seulement si $\forall x \in E,\ x \subset E$.

1°) Si E est transitif, montrer que $E \cup \{E\}$ est aussi transitif.

2°) Si E est transitif, montrer que $\mathcal{P}(E)$ est aussi transitif.

Exercice 3.23 : (niveau 2)

k désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $A_1, \ldots, A_k$ sont k parties d'un même ensemble. Montrer que
$A_1 \cup \cdots \cup A_k = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_{k-1} \setminus A_k) \cup (A_k \setminus A_1) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_k)$.

Exercice 3.24 : (niveau 2)

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini. Montrer qu'on peut lister les éléments de $\mathcal{P}(E)$ de sorte que la liste commence par $\emptyset$, se termine par $\{x_n\}$ et que chaque nouveau terme de la liste est obtenu depuis le précédent par ajout ou retrait d'un unique élément de E.

Exercice 3.25 : (niveau 2)

Soit X un ensemble. On dit que $\mathcal{R}$ est un anneau de X si et seulement si $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ et si, pour tout $A, B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$ et $A \cup B \in \mathcal{R}$.
Montrer que si $\mathcal{R}$ est un anneau de X, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout
$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{R}$ et $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{R}$.

Exercice 3.26 : (niveau 2)

Soient E un ensemble, n un entier non nul, $A_1, \ldots, A_n$ et $B_1, \ldots, B_n$ des parties de E.
Montrer que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i) = \bigcap\limits_{X \subset [\![1,n]\!]} \Big(\Big(\bigcup\limits_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup\limits_{i \notin X} B_i\Big)\Big)$.

Exercice 3.27 : (niveau 2)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des ensembles distincts deux à deux. Démontrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

Exercice 3.28 : (niveau 3)
Soit E un ensemble, $a \in E$ et f une application de E dans E.
Pour valider le principe de construction d'une suite par récurrence, on souhaite montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) Montrer l'unicité.

2°) On note A l'ensemble des parties u de $\mathbb{N} \times E$ telles que
— $(0, a) \in u$ et
— $\forall (n, x) \in u, \ \ (n + 1, f(x)) \in u$.
Montrer que l'on peut définir $v = \bigcap_{u\in A} u$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x \in E$ tel que $(n, x) \in v$.
Conclure.

3°) Les suites récurrentes sont souvent construites selon une méthode plus complexe que précédemment : on considère toujours un ensemble E et un élément a de E mais on part maintenant d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application de E^{n+1} dans E.
Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_n(u_0, \dots, u_n)$.

4°) Il est fréquent que la fonction f_n de la question précédente ne soit pas unique : on considère toujours un ensemble E et un élément a de E mais on part maintenant d'une suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est une application de E^{n+1} dans $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.
En supposant l'axiome du choix, montrer qu'il existe au moins une suite (u_n) d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \in F_n(u_0, \dots, u_n)$.
On pourra pour cela utiliser le théorème de Zermelo selon lequel l'axiome du choix est équivalent au fait que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre.

Logique

Exercice 3.29 : (niveau 1)
Soient E un ensemble et A, B, C, D quatre parties de E. Démontrer que :

1. $(A \cap B = A \cup B) \iff A = B$;
2. $((A \cap B \subset A \cap C) \wedge (A \cup B \subset A \cup C)) \Longrightarrow (B \subset C)$;
3. $((A \cup B = A \cap C) \wedge (B \cup C = B \cap A) \wedge (C \cup A = C \cap B)) \Longrightarrow (A = B = C)$;
4. $((A \subset C) \wedge (B \subset D) \wedge (C \cap D = \emptyset) \wedge (A \cup B = C \cup D)) \Longrightarrow ((A = C) \wedge (B = D))$.

Exercice 3.30 : (niveau 1)

Donner (en justifiant) la valeur booléenne de l'assertion
$\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$, ainsi que de toutes celles que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des sous-formules "$\exists x$", "$\forall y$" et "$\forall z$".

Exercice 3.31 : (niveau 1)

Soient P, Q, R trois assertions.

1°) Démontrer que $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow ((R \Longrightarrow P) \Longrightarrow (R \Longrightarrow Q))$.

2°) Les assertions $P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$ et $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3.32 : (niveau 2)

Soient E un ensemble, A une partie de E^2 et B une partie de E.
Nier les assertions suivantes :
$\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ ((x, y) \in A \Longrightarrow x \in B)$ et
$\forall x \in E,\ (\exists y \in E,\ (x, y) \in A) \Longrightarrow (x \in B)$.
Expliquer ces deux assertions ainsi que leurs négations.

Exercice 3.33 : (niveau 2)

Donner la contraposée des expressions suivantes :

1. $(A \wedge (B \vee C)) \Longrightarrow (B \vee (A \wedge C))$.
2. $(\exists! x,\ (x \in A\ \textit{et}\ x \in B)) \Longrightarrow (\forall y,\ \exists! x,\ (x \in A\ \textit{et}\ (y - x) \in B))$.

Ces propositions sont-elles vraies ?

Exercice 3.34 : (niveau 3)

Cet exercice donne un aperçu de la démonstration d'un des théorèmes d'incomplétude de Gödel : "Pour toute théorie mathématique T, non contradictoire et contenant la théorie des entiers naturels, il existe une assertion, énonçable dans le cadre de la théorie T, qui est vraie mais qui n'est pas démontrable dans le cadre de la théorie T".
Supposons que l'on a numéroté toutes les assertions (vraies ou fausses) énonçables dans le cadre de la théorie T : $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ On se limite donc au cas où l'ensemble des assertions énonçables dans le cadre de la théorie T est dénombrable. Ce n'est pas très restrictif, car si l'alphabet utilisé pour écrire ces énoncés est fini, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'ensemble des énoncés formant une phrase de longueur inférieure à ℓ est fini, donc l'ensemble de tous les énoncés est bien dénombrable.
Supposons par ailleurs que l'on a numéroté certaines parties de $\mathbb{N}$, appelées parties répertoriées et notées $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$
On dit que n est remarquable lorsque $n \in P_n$. T contient la théorie des entiers, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété "$n \in P_n$" est un énoncé de T : ainsi, il existe m tel que A_m est l'assertion " n est remarquable ". On dira alors que m est le conjugué de n.
Pour conserver la simplicité de l'argument, nous éludons certaines difficultés, relatives au formalisme définissant ce qu'est une théorie T. De plus, nous admettons qu'il est possible de choisir les parties répertoriées de sorte que :

1. Les numéros des assertions démontrables dans le cadre de la théorie T forment une partie répertoriée.

2. Si X est une partie répertoriée, alors $\mathbb{N} \setminus X$ est aussi répertoriée.
3. Pour toute partie répertoriée X, il existe une partie répertoriée Y dont les éléments sont exactement les entiers dont le conjugué est dans X.

Considérons alors la partie X constituée des numéros des assertions non démontrables. C'est une partie répertoriée d'après (1) et (2). On peut donc lui associer, d'après (3), une partie répertoriée Y dont les éléments sont les entiers dont le conjugué est dans X. On note n le numéro de Y (de sorte que $Y = P_n$) et l'on désigne par m le conjugué de n (de sorte que A_m est l'assertion : “ n est remarquable ”).

1°) Démontrer que n est remarquable. *Raisonner par l'absurde et utiliser le fait que T n'est pas contradictoire, c'est-à-dire que toutes les assertions démontrables dans le cadre de la théorie T sont vraies.*

2°) En déduire que A_m est une assertion vraie mais non démontrable dans le cadre de la théorie T.