# Résumé de cours :
# Semaine 4, du 23 au 27 septembre.

## 1 Formules propositionnelles (suite et fin)

### 1.1 Sémantique

**Définition.** Une distribution de valeurs de vérité sur l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables propositionnelles est une application de $\mathcal{V}$ dans l'ensemble $\{V, F\}$.

**Définition.** Soit $v$ une distribution de valeurs de vérité sur l'ensemble $\mathcal{V}$. On prolonge $v$ sur l'ensemble des formules propositionnelles construites à partir de $\mathcal{V}$ de la manière suivante : pour toutes formules propositionnelles $P$ et $Q$,

— $v(P \wedge Q) = 1$ si et seulement si $v(P) = v(Q) = 1$.
— $v(P \vee Q) = 1$ si et seulement si $v(P) = 1$ ou $v(Q) = 1$.
— $v(P \Longrightarrow Q) = 0$ si et seulement si $v(P) = 1$ et $v(Q) = 0$.
— $v(P \Longleftrightarrow Q) = 1$ si et seulement si $v(P) = v(Q)$.
— $v(\neg P) = 1$ si et seulement si $v(P) = 0$.

**Définition.** La définition précédente est équivalente à la donnée des "tables de vérité" des connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ et $\neg$ :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Longrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | F | V |

**Définition.** Lorsque $P \Longrightarrow Q$, on dit que $P$ est une *condition suffisante* pour $Q$ et que $Q$ est une *condition nécessaire* pour $P$.
Lorsque $P \Longleftrightarrow Q$, on dit que $P$ est une *condition nécessaire et suffisante* pour $Q$.

**Définition.** Une tautologie est une formule propositionnelle qui est toujours vraie, quelle que soit la distribution de valeurs de vérité des variables propositionnelles qui interviennent dans la formule.

**Exemple.** Quelques tautologies à connaître ( $A, B, C$ désignent des formules propositionnelles quelconques) :

1. $(A \vee (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ : associativité de $\vee$ ($\wedge$ est aussi associatif),
2. $(A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ : distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$,
3. $(A \vee (B \wedge C)) \Longleftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ : distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$,
4. $(A \wedge (A \vee B)) \Longleftrightarrow A$ : première loi d'absorption,
5. $((A \vee (A \wedge B)) \Longleftrightarrow A$ seconde loi d'absorption,
6. $(\neg(A \vee B)) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ : loi de Morgan,
7. $(\neg(A \wedge B)) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ : loi de Morgan,
8. $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee B$ (une définition de l'implication),

9. $\neg(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge (\neg B)$,
10. $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$ : contraposition.
11. $((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$ (règle du modus ponens).

Il faut savoir le démontrer.

**Définition.** On dit que deux propositions $P$ et $Q$ sont logiquement équivalentes si et seulement si la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ est une tautologie. On notera alors $P \equiv Q$
Ainsi, lorsque l'on ne s'intéresse qu'à la valeur booléenne des propositions, on peut remplacer toute proposition par une proposition qui lui est logiquement équivalente.

**Exemple.** $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.
$\neg(A \Longrightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ et $A \Longrightarrow B \equiv \neg A \vee B$.

**Définition.** La contraposée de l'implication $A \Longrightarrow B$ est égale à $\neg B \Longrightarrow \neg A$.
Toute implication est logiquement équivalente à sa contraposée.

# 2 Négation d'une proposition

⋄ $\neg(A \vee B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A) \wedge (\neg B)$,
$\neg(A \wedge B)$ est logiquement équivalente à $(\neg A) \vee (\neg B)$.
⋄ $\neg(\neg A)$ est logiquement équivalente à $A$.
⋄ $\neg(A \Longrightarrow B)$ est logiquement équivalente à $A \wedge (\neg B)$.
⋄ Une équivalence est la conjonction de deux implications, donc
$\neg(A \Longleftrightarrow B)$ est logiquement équivalente à $[\neg(A \Longrightarrow B)] \vee [\neg(B \Longrightarrow A)]$.

**Propriété.** Soit $P$ un prédicat sur un ensemble $E$.
$\neg[\forall x \in E,\ P(x)] \Longleftrightarrow [\exists x \in E,\ \neg P(x)]$
et $\neg[\exists x \in E,\ P(x)] \Longleftrightarrow [\forall x \in E,\ \neg P(x)]$.

**Exemple.** Savoir nier qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels converge vers 0 :
$\neg[\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [n \geq N \Longrightarrow |x_n| \leq \varepsilon]] \equiv \cdots$.

**Propriété.** Soit $A$ et $B$ deux ensembles de $E$.
Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E$, avec $I \neq \emptyset$. Alors,
- $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
- $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$,
- $\overline{\bigcap_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{E_i}$, , $\overline{\bigcup_{i \in I} E_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{E_i}$.

# 3 Relations binaires

## 3.1 Définitions

**Définition.** Une relation binaire $R$ sur $E \times F$ est une partie de $E \times F$, mais on notera "$xRy$" au lieu de "$(x, y) \in R$". Le graphe de $R$ est $\{(x, y) \in E \times F / xRy\}$, donc le graphe de $R$ est ... égal à $R$.

**Définition.** Lorsque $E = F$, on dit que
- $R$ est réflexive si et seulement si $\forall x \in E,\ xRx$,
- $R$ est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in E,\ (xRy) \Longrightarrow (yRx)$,
- $R$ est antisymétrique si et seulement si $\forall x, y \in E,\ [(xRy) \wedge (yRx) \Longrightarrow x = y]$,
- et $R$ est transitive si et seulement si $\forall x, y, z \in E,\ [(xRy) \wedge (yRz) \Longrightarrow (xRz)]$.

### 3.2 Relations d'ordre

**Définition.** Une relation binaire $R$ sur un ensemble $E$ est appelée une relation d'ordre si et seulement si $R$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

**Définition.** Une relation d'ordre $R$ sur un ensemble $E$ est totale si et seulement si pour tout couple $(x, y)$ de $E^2$, $x$ et $y$ sont comparables, c'est-à-dire $(xRy) \vee (yRx)$. Sinon, on dit que l'ordre est partiel.

**Exemple.** $\diamond$ Si $A$ est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(A)$, partielle dès que $A$ possède plus de deux éléments.
$\diamond$ Si $(E, \leq_E)$ est un ensemble ordonné, l'ordre lexicographique est un ordre sur $E^n$. Il est total lorsque $\leq_E$ est total. Il faut savoir le démontrer lorsque $n = 2$.

**Définition.** Soit $F$ une partie de $E$ et $m \in E$. On dit que $m$ est un majorant de $F$ si et seulement si pour tout $a \in F$, $a \preceq m$. On définit de même la notion de minorant d'une partie de $E$.
On dit qu'une partie est majorée si et seulement si elle possède au moins un majorant.
On dit qu'une partie est minorée si et seulement si elle possède au moins un minorant.
On dit qu'une partie est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

**Définition.** Si $F$ est une partie de $E$ et $m \in E$, on dit que $m$ est le maximum de $F$ si et seulement si $m$ majore $F$ et $m \in F$. On le note $\max(F)$. On défnit de même le minimum de $F$.

**Définition.** La borne supérieure de $F$ est le minimum de l'ensemble des majorants (lorsqu'il existe). On le note $\sup(F)$. La borne inférieure de $F$ est le maximum de l'ensemble des minorants (lorsqu'il existe). On le note $\inf(F)$.

**Exemple.** Si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(A)$ (où $A$ est un ensemble), alors, au sens de l'inclusion, $\mathcal{F}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure : $\sup(\mathcal{F}) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ et $\inf(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, en convenant que l'intersection vide vaut $A$. Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.
Si $A$ possède un maximum, alors $A$ possède une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
Cependant, il est "fréquent" que $A$ ne possède pas de maximum, mais possède une borne supérieure. Dans ce cas, $\sup A \notin A$.

**Propriété.** Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
Si $A$ et $B$ possédent des bornes supérieures : si $B \subset A$, alors $\sup(B) \leq \sup(A)$.
Si $A$ et $B$ possédent des bornes inférieures : si $B \subset A$, alors $\inf(B) \geq \inf(A)$.
Démonstration à connaître.

**Passage à la borne supérieure (resp : inférieure) :** Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $A$ une partie de $E$ possédant une borne supérieure.
$\diamond$ Soit $e \in E$. Alors $\sup(A) \leq e \Longleftrightarrow [\forall a \in A, \ a \leq e]$.
Le fait de passer de la propriété "$\forall a \in A, \ a \leq e$" à l'affirmation "$\sup(A) \leq e$" s'appelle le *passage à la borne supérieure*.
$\diamond$ Il faut savoir le justifier : si $[\forall a \in A, \ a \leq e]$, alors $e$ est un majorant de $A$, or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants, donc $\sup(A) \leq e$.
$\diamond$ ATTENTION, en général, $\sup(A) \notin A$, donc le passage à la borne supérieure ne se réduit pas au fait d'appliquer la propriété "$\forall a \in A, \ a \leq e$" avec $a = \sup(A)$.
$\diamond$ De même, si $B$ est une partie de $E$ possédant une borne inférieure, le principe du passage à la borne inférieure consiste à passer de la propriété, "$\forall a \in A, \ a \geq e$" à "$\inf(A) \geq e$".

**Propriété de la borne supérieure :** Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

**Propriété.** Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.
Il faut savoir le démontrer.

**Propriété.** Soit $A$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors
$s = \sup(A) \iff [\forall a \in A,\ \ a \leq s] \wedge [\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists a \in A,\ \ s - \varepsilon < a]$.
Démonstration à connaître.

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.
Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $\sup(A)$.
Démonstration à connaître.

**Propriété.** Soit $A$ une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$. Alors
$m = \inf(A) \iff [\forall a \in A,\ \ a \geq m] \wedge [\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists a \in A,\ \ m + \varepsilon > a]$.

**Définition.** Soit $F$ une partie de $E$ et $m$ un élément de $F$.
$m$ est maximal dans $F$ si et seulement si $\forall x \in F (x \succeq m \Longrightarrow x = m)$, i.e $\forall x \in F,\ \ \neg(x \succ m)$.
$m$ est minimal dans $F$ si et seulement si $\forall x \in F (x \preceq m \Longrightarrow x = m)$, i.e $\forall x \in F,\ \ \neg(x \prec m)$.

**Propriété.** Lorsque la relation d'ordre est totale, toute partie $F$ de $E$ possède au plus un élément maximal et dans ce cas, c'est le maximum de $F$. Idem avec minimal et minimum.

> **Exercice.** Si $E$ est un ensemble fini et non vide, pour tout ordre défini sur $E$, montrer que $E$ possède au moins un élément minimal.
> A connaître.

## 3.3 Relations d'équivalence (début)

**Définition.** Une relation binaire sur un ensemble $E$ est une relation d'équivalence si et seulement si $R$ est réflexive, symétrique et transitive.

**Exemple fondamental :** Soit $E$ et $F$ deux ensembles et $f\ :\ E \longrightarrow F$ une application.
Convenons que, pour tout $x, y \in E$, $x\ R\ y \iff f(x) = f(y)$.
Alors $R$ est une relation d'équivalence sur $E$.

**Définition.** Soit $R$ une relation d'équivalence sur $E$.
Si $x \in E$, on note $\overline{x}$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $xRy$.
$\overline{x}$ s'appelle la classe d'équivalence de $x$.
On désigne par $E/R$ l'ensemble des classes d'équivalence : $E/R = \{\overline{x}/x \in E\}$.
$E/R$ s'appelle l'ensemble quotient de $E$ par $R$.

**Propriété.** pour tout $x, y \in E$, $xRy \iff \overline{x} = \overline{y}$.
Il faut savoir le démontrer.