TD 2 : corrigé d'un exercice

Exercice 2.26 :

$\diamond$ *Méthode trigonométrique :*
Nécessairement, l'inconnue x doit être positive afin que $\sqrt{x}$ soit défini.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Posons $\theta = 2\text{arctan}\sqrt{x} \in [0, \pi[$.
Alors $\sqrt{x} = \tan \frac{\theta}{2}$ et d'après le cours, $\dfrac{1-x}{1+x} = \cos\theta$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = \sin\theta$.
Ceci prouve déjà que $\dfrac{1-x}{1+x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ sont dans $[-1, 1]$, donc que les quantités $\arccos\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)$ et $\arcsin\Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)$ sont définies. Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R}_+$.
De plus, $(E) \iff \pi = \arccos(\cos\theta) + \arcsin(\sin\theta)$.
Lorsque $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$, $\arcsin(\sin\theta) = \arcsin(\sin(\pi - \theta))$ et $\pi - \theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$,
donc $\arcsin(\sin\theta) = \pi - \theta$. Alors $(E) \iff \pi = \theta + \pi - \theta \iff \pi = \pi$, ce qui est vrai.
Lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $(E) \iff \pi = 2\theta$, ce qui est faux.
Ainsi, $(E) \iff \theta \geq \frac{\pi}{2} \iff \frac{\theta}{2} \geq \frac{\pi}{4} \iff \sqrt{x} \geq 1 \iff x \geq 1$.

$\diamond$ Pour les deux méthodes suivantes, on recherche d'abord directement le domaine de définition de l'équation :
Soit $x \in \mathbb{R}_+$: $\dfrac{1-x}{1+x} \in [-1, 1] \iff -1-x \leq 1-x \leq 1+x$, car $1+x > 0$, donc $\dfrac{1-x}{1+x} \in [-1, 1] \iff x \geq 0$, ce qui est vrai. De plus $(1-\sqrt{x})^2 \geq 0$, donc $1 + x \geq 2\sqrt{x}$ puis $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \in [0, 1]$. On a montré que le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R}_+$.

$\diamond$ *Seconde méthode trigonométrique :* Soit $x \in [1, +\infty[$. Posons $\theta = \arccos\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)$.
$\theta \in [0, \pi]$, donc $\sin\theta \geq 0$, or $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, donc $\sin\theta = \sqrt{1 - \Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)^2}$. De même, on montre que $\cos\Big(\arcsin\Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)\Big) = \sqrt{1 - \Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)^2}$. Ainsi,

$$\sin\Big(\arccos\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) + \arcsin\Big(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)\Big) = \frac{1-x}{1+x}.\frac{2\sqrt{x}}{1+x} + \sqrt{1 - \frac{1+x^2-2x}{1+x^2+2x}}.\sqrt{1 - \frac{4x}{1+x^2+2x}},$$

donc $\sin\Big(\arccos\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big) + \arcsin\Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)\Big) = \dfrac{(1-x)2\sqrt{x}}{(1+x)^2} + \dfrac{\sqrt{4x}.\sqrt{(1-x)^2}}{(1+x)^2} = 0$, car

lorsque $x \geq 1$, $\sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = x-1$.
De plus, pour $x \geq 1$, $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ et $\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$,
donc $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \in [\dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{2}]$. Or $\sin|_{[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]}$ est injective, donc $(E) \iff \sin\left(\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\right) = \sin(\pi) \iff 0 = 0$. Ceci montre que (E) est vraie pour tout $x \geq 1$.
Lorsque $x \in [0, 1[$, $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \geq 0$, donc $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$
et $\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. Ainsi, $\arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) < \pi$ et x n'est pas solution de l'équation.
On a ainsi retrouvé que l'ensemble des solutions est $[1, +\infty[$.

$\diamond$ *Méthode analytique :*
On note f l'application $x \longmapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. On a déjà vu que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $\dfrac{1-x}{1+x} = -1 \iff 1 = -1$, $\dfrac{1-x}{1+x} = 1 \iff x = 0$ et
$\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = 1 \iff (1-\sqrt{x})^2 = 0 \iff x = 1$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
Sur cet ensemble, on calcule que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2}{(1+x)^2} \frac{-1}{\sqrt{1 - \dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} + \frac{\dfrac{1+x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{4x}{(1+x)^2}}} \\
&= \frac{2}{1+x} \frac{1}{\sqrt{4x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)} \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} (1 + sgn(1-x)).
\end{aligned}$$

Lorsque $x > 1$, $f'(x) = 0$, donc f est constante sur $]1, +\infty[$, puis par continuité sur $[1, +\infty[$, or $f(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc lorsque $x \geq 1$, on retrouve que x est solution de (E).
Lorsque $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}(1+x)} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
Soit y, z tels que $x < y < z < 1$. Alors $f(x) < f(y) < f(z)$, or $f(z) \underset{z \to 1^-}{\longrightarrow} f(1) = \pi$, donc par passage à la limite, $f(y) \leq \pi$, donc $f(x) < \pi$, ce qui montre que lorsque $x \in]0, 1[$, x n'est pas solution de (E).