Feuille d'exercices 4.
Relations binaires.

Exercice 4.1 : (niveau 1)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications réelles bornées. Que peut-on dire de $\sup\{f(x) + g(x)/x \in \mathbb{R}\}$ vis-à-vis de $\sup\{f(x)/x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x)/x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 4.2 : (niveau 1)
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Pour tout $x, y \in E$, on convient que $x \; C \; y \iff (x \leq y) \vee (y \leq x)$.
Ainsi, $x \; C \; y$ si et seulement si x et y sont comparables.
La relation binaire C est-elle réflexive, est-elle symétrique, est-elle transitive ?

Exercice 4.3 : (niveau 1)
On considère la relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^2, \;\; (n \preceq m) \iff \exists p \in \mathbb{N}, \;\; m = n^p.$$

Vérifier que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 4.4 : (niveau 1)
On note G l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bijectives et affines (c'est-à-dire de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Lorsque f, g sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on convient que $f \equiv g$ si et seulement si il existe $h \in G$ tel que $f \circ h = h \circ g$.
Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Lorsque $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, décrire la classe d'équivalence de f.

Exercice 4.5 : (niveau 1)
R est une relation binaire sur un ensemble E. On suppose que R est réflexive et transitive (on dit que R est un préordre).

1°) On définit la relation binaire S par : $\forall x, y \in E, \;\; xSy \iff (xRy) \wedge (yRx)$.
Montrer que S est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $\overline{x}, \overline{y} \in E/S$, on pose $\overline{x}\overline{R}\overline{y} \iff xRy$.
Montrer que $\overline{R}$ est correctement définie et que c'est une relation d'ordre.

3°) Montrer que la relation R de divisibilité est un préordre sur $\mathbb{Z}$.

Quelles sont les classes d'équivalence de la relation S associée ?
La relation d'ordre associée est-elle totale ?

Exercice 4.6 : (niveau 2)

Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des entiers naturels $a_1, \ldots, a_n$ non nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$, avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Exercice 4.7 : (niveau 2)

Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.
Exprimer $\displaystyle\sup_{x,y \in A} |x - y|$ en fonction de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Exercice 4.8 : (niveau 2)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On définit une relation $\leqslant_f$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant_f y \Longleftrightarrow f(y) - f(x) \geqslant |y - x|.$$

1°) Montrer que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre.

2°) Montrer que $\leqslant_f$ est totale si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$$

3°) À quoi la relation $\leqslant_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}$ est-elle égale ?

Exercice 4.9 : (niveau 2)

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est bien ordonné lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1°) a) Démontrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.
La réciproque est-elle vraie ?
b) Démontrer qu'un ensemble fini et totalement ordonné est bien ordonné.

2°) Démontrer que si $(E, \preceq)$ et $(E, \succeq)$ sont bien ordonnés, alors E est un ensemble fini.

3°) On dit qu'un élément x de E admet un successeur s dans E lorsque

$$x \prec s \text{ et } \forall a \in E, \ (x \prec a) \Longrightarrow (s \preceq a),$$

où $\prec$ désigne l'ordre strict associé à $\preceq$.
a) Démontrer que si un élément x de E admet un successeur, alors celui-ci est unique. On le note $\mathrm{succ}(x)$.
b) Dans le cas où E est bien ordonné, démontrer que, pour tout élément x de E, on a l'alternative suivante : ou bien x est un élément maximal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément plus grand que x dans E) ou bien x admet un successeur.

Exercice 4.10 : (niveau 2)

Soit E un ensemble et $\mathcal{E}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.
On suppose que, pour tout $X, Y \in \mathcal{E}$, il existe $Z \in \mathcal{E}$ tel que $Z \subset X \cap Y$.
Lorsque $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on convient que $A\ R\ B$ si et seulement si il existe $X \in \mathcal{E}$ tel que $X \cap A = X \cap B$.
Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
Déterminer la classe d'équivalence de $\emptyset$ et de E.

Exercice 4.11 : (niveau 2)

Soit E un ensemble infini.
On note $I(E)$ l'ensemble dont les éléments sont les complémentaires des parties finies de E.
On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$ en convenant que, pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, $X\mathcal{R}Y \iff \exists F \in I(E),\ \ X \cap F = Y \cap F$.

1°) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, montrer que $X\mathcal{R}Y$ si et seulement si $X\Delta Y$ est fini.

Exercice 4.12 : (niveau 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Toutes les suites de cet exercice seront à valeurs dans $[a, b]$.
Soit (x_n) une suite.
On pose $\text{limsup}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$ et $\text{liminf}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$.
Montrer que ces notions sont bien définies et que $\text{limsup}(x_n) \geq \text{liminf}(x_n)$.
Soit (y_n) une seconde suite.
a) Montrer que si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$, alors
$\text{limsup}(x_n) \leq \text{limsup}(y_n)$ et $\text{liminf}(x_n) \leq \text{liminf}(y_n)$.
b) Montrer que $\text{limsup}(x_n + y_n) \leq \text{limsup}(x_n) + \text{limsup}(y_n)$ et que
$\text{limsup}(x_n) + \text{liminf}(y_n) \leq \text{limsup}(x_n + y_n)$.
c) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$: Montrer que
$\text{limsup}(x_n)\text{liminf}(y_n) \leq \text{limsup}(x_n y_n) \leq \text{limsup}(x_n)\text{limsup}(y_n)$.

Exercice 4.13 : (niveau 2)

On dit que l'égalité $n = \sum\limits_{k=1}^{p} k!x_k$ est une écriture factorielle de n si et seulement si

- $p \in \mathbb{N}$,
- $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$,
- $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$, $0 \leq x_k \leq k$,
- et $x_p \neq 0$.

Montrer que tout entier naturel possède une unique écriture factorielle.

Exercice 4.14 : (niveau 3)
Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, on convient que
$X \; R \; Y \Longleftrightarrow \forall x \in X, \;\; \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \;\; \exists y \in Y, \;\; x - \varepsilon \leq y$
et que $X \; S \; Y \Longleftrightarrow (X \; R \; Y \; et \; Y \; R \; X)$.

1°) Montrer que S est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$,
montrer que $X \; S \; Y$ si et seulement si $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(X) = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}(Y)$.

3°) En déduire une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})/S$ et $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 4.15 : (niveau 3)

Lemme de Spilrajn-Marczewski :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini, de cardinal n. Montrer qu'il existe une bijection croissante φ de E dans $[\![1, n]\!]$.
En déduire qu'on peut munir E d'un ordre total $\leq'$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$. Un tel ordre est appelé extension linéaire de $(E, \leq)$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 4.16 : (niveau 1)

Soient E un ensemble et A une partie de E. On considère la relation R sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ \ (X\ R\ Y) \Longleftrightarrow (X \cap A = Y \cap A).$$

1°) Démontrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer la classe d'équivalence de X.

Exercice 4.17 : (niveau 1)

Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que $(A \subset B) \Longrightarrow (\sup A \leq \sup B)$.

2°) Démontrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.

3°) Démontrer que $A \cap B$ est majorée.
Quelle propriété peut-on établir reliant $\sup(A \cap B)$, $\sup A$ et $\sup B$?

Exercice 4.18 : (niveau 1)

On considère la relation R sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ (x\ R\ y) \Longleftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y).$$

1°) Vérifier que R est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4.19 : (niveau 1)

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R par : $x\ R\ y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

1°) Montrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.20 : (niveau 1)

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E. On dit que R est symétrico-transitive lorsque, pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x\ R\ y) \wedge (y\ R\ z) \Longrightarrow (z\ R\ x)$.
Démontrer que R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive et symétrico-transitive.

Exercice 4.21 : (niveau 1)

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E qui est transitive et symétrique. Démontrons que R est une relation d'équivalence, autrement dit que R est automatiquement réflexive. Soit $a \in E$. Considérons $b \in E$ tel que $a\ R\ b$. Par symétrie de R, on obtient $b\ R\ a$. Puis par transitivité de R on en déduit que $a\ R\ a$. Ainsi R est bien réflexive, ce qui démontre que c'est une relation d'équivalence.
Trouver l'erreur dans ce raisonnement ! Donner un contre-exemple.

Exercice 4.22 : (niveau 2)

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}$.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

2°) Trouver $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq C(n + 1)$.

Exercice 4.23 : (niveau 2)

Déterminer les applications f, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissantes telles que, $f(2) = 2$ et, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $f(pq) = f(p)f(q)$.

Exercice 4.24 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la borne inférieure de
$\{(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \ / \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Exercice 4.25 : (niveau 2)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
Pour tout $a \in A$, on note $C_A(a)$ l'ensemble des éléments de A qui sont comparables avec a.
On note B l'ensemble des $a \in A$ tels que $C_A(a)$ possède un maximum.
Montrer que l'ensemble des éléments maximaux de A est égal à $\{\max(C_A(a)) \ / \ a \in B\}$.

Exercice 4.26 : (niveau 2)

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E^E)$. On note $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E) / \forall f \in \mathcal{A}, \ \ f(X) \subset X\}$.
Montrer que pour l'inclusion, toute partie non vide de $\mathcal{F}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathcal{F}$.

Exercice 4.27 : (niveau 2)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit qu'une partie X de E est libre si ses éléments sont 2 à 2 non comparables.
On note $L(E)$ l'ensemble des parties libres de E. On définit sur $L(E)$ la relation R par :

$$X \ R \ Y \iff (\forall x \in X, \ \ \exists y \in Y, \ \ x \leq y).$$

1°) Montrer que R est une relation d'ordre.

2°) Montrer que la fonction $Id_{L(E)}$ est croissante de $(L(E), \subset)$ dans $(L(E), R)$.

3°) Sa réciproque est-elle croissante ?

Exercice 4.28 : (niveau 2)

Soit I un segment non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Montrer que, pour tout $\lambda \in f(I)$, $\lambda = f(\inf\{z \in I / f(z) = \lambda\})$.

Exercice 4.29 : (niveau 2)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) sont deux suites de réels, on convient que $(u_n)\ R\ (v_n)$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists p, q \geq n,\ \ (u_p \leq v_n) \wedge (v_q \leq u_n)$.

1°) R est-elle une relation d'ordre ? Est-elle une relation d'équivalence ?

2°) Notons c une suite constante. Déterminer les suites u telles que $u\ R\ c$.

Exercice 4.30 : (niveau 2)

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations d'équivalence définies sur un ensemble E. On dit que, R et R' étant 2 éléments de $\mathcal{R}$, R est plus fine que R' si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad xRy \Rightarrow xR'y.$$

a)Montrez que la relation “plus fin que” est un ordre sur $\mathcal{R}$ et que l'ensemble ordonné $\mathcal{R}$ a un plus grand élément et un plus petit élément.
b)Montrez que R est plus fine que R' si et seulement si toute classe modulo R' est une réunion de classes modulo R.
c)On prend $E = \mathbb{Z}$. Déterminez toutes les congruences qui sont plus ou moins fines qu'une congruence donnée.

Exercice 4.31 : (niveau 2)

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, on pose :

$$A_x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_n \quad \text{et} \quad G_x = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

Soit $m > 0$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble $\left\{x \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n \mid A_x = m\right\}$ et pour tout $x \in \mathcal{M}, \mu(x)$ le nombre d'apparitions de m dans x. On définit sur $\mathcal{M}$ une relation $\prec$ de la manière suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{M}, \quad x \prec y \Longleftrightarrow G_x < G_y$$

1°) La relation $\prec$ est-elle réflexive ? transitive ? antisymétrique ?

2°) Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}$. On suppose que $\mu(x) < n$.
a) Montrer qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}_n$ tels que $x_i < m < x_j$.
b) Montrer que $x_i x_j < m\,(x_i + x_j - m)$.
c) En déduire l'existence d'une famille $y \in \mathcal{M}$ pour laquelle $x \prec y$ et $\mu(x) < \mu(y)$.

3°) En déduire que $G_x \leqslant A_x$ et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 4.32 : (niveau 2)

Soient R_1 et R_2 deux relations d'équivalence définies sur un ensemble E. On définit sur E la relation binaire $R_2 o R_1$ par :
$\forall (x, z) \in E^2$, $x(R_2 o R_1)z \Longleftrightarrow \exists y \in E \quad (xR_1y)$ et (yR_2z).
Montrez que $R_2 o R_1$ est une relation d'équivalence si et seulement si $R_2 o R_1 = R_1 o R_2$.

Exercice 4.33 : (niveau 2)

On munit $E = [0, 1] \times [0, 1]$ de l'ordre lexicographique. Montrez que toute partie non vide de E admet une borne supérieure. Ce résultat subsiste-t-il avec $E = [0, 1] \times]0, 1]$?

Exercice 4.34 : (niveau 3)

Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) > f(f(n))$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = n$.

Exercice 4.35 : (niveau 3)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tout entier $n \geq 2$, au moins la moitié des termes $u_1, \ldots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.
Démontrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

Exercice 4.36 : (niveau 3)

Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Étant donnés deux éléments x et y de E, on dit que y est un R-antécédent de x si $y \; R \; x$.

1°) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $X \subset E$ non vide, il existe $x \in X$ n'admettant aucun R-antécédent dans X ;
2. Il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \; R \; x_n$;
3. Pour tout $X \subset E$,
$\Big(\forall x \in E, \; ((\forall y \in E, \; (y \; R \; x \Longrightarrow y \in X)) \Longrightarrow x \in X)\Big) \implies X = E.$

Une relation R vérifiant ces propriétés est appelée une relation bien fondée.

2°) Montrer qu'une relation bien fondée est antireflexive (pour tout x, x n'est pas en relation avec lui-même) et antisymétrique.

3°) Une relation d'ordre $\leq$ sur E est appelée une relation de bon ordre si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.
(a) Montrer qu'une relation de bon ordre est totale.
(b) Montrer que si $\leq$ est une relation de bon ordre, alors la relation stricte associée $<$ est une relation bien fondée.
(c) Donner un exemple de bon ordre.

Exercice 4.37 : (niveau 3)

Soit R une relation binaire sur un ensemble X, et x un élément de X.
On pose $xR = \{z \in X / x \; R \; z\}$ et $Rx = \{z \in X / z \; R \; x\}$. Ces deux ensembles sont respectivement appelés section commençante et section finissante de base x.
On définit trois relations sur E par $[x \; T_d \; y \Longleftrightarrow yR \subset xR]$, $[x \; T_g \; y \Longleftrightarrow Rx \subset Ry]$ et $T = T_d \cap T_g$. Ces relations sont appelées respectivement trace à droite, trace à gauche et trace.

1°) Montrer que T_d, T_g et T sont des préordres (c'est-à-dire sont réflexives et transitives).

2°) Une relation binaire R sur X est appelée un tournoi si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et si elle est totale, c'est-à-dire si deux éléments quelconques de X sont toujours comparables.
On suppose que R est un tournoi.
a) Montrer que T_d et T_g sont deux ordres égaux et contenus dans R.
b) Montrer que x est un élément minimal de (X, T) si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in R$ et $(z, y) \in R$.
c) Que dire si R est un tournoi transitif ?

Exercice 4.38 : (niveau 3)

1°) Lorsque A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si
— $\forall (a, b) \in A \times B,\ \ a \leq b\,;$
— $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists (a, b) \in A \times B,\ \ b - a \leq \varepsilon.$

Montrer que la propriété de la borne supérieure est équivalente à la propriété suivante :
Deux parties A, B de $\mathbb{R}$ sont adjacentes si et seulement si il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a \leq c \leq b$.

2°) Montrer que la propriété de la borne supérieure est équivalent à la propriété suivante : Si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites adjacentes de réels (c'est-à-dire que l'une est croissante, l'autre décroissante et que $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$) alors elles convergent vers un même réel.

Exercice 4.39 : (niveau 3)
On note G l'ensemble des applications f de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Déterminer $\inf\limits_{f \in G} \displaystyle\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx$.