DM 5. Corrigé

Problème 1 : une intégrale dépendant d'un paramètre.

1°) $\varphi(0) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ et $\varphi(2) = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

2°) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x < y$.
Soit $t \in]0,1]$. $t^x = e^{x \ln t} \geq e^{y \ln t} = t^y$ car $\ln t \leq 0$.
Lorsque $t = 0$, $0^y = 0$ et $0^x \geq 0$, donc on a encore $t^x \geq t^y$.
Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t^x} \leq \dfrac{1}{1+t^y}$, donc par croissance de l'intégrale, $\varphi(x) \leq \varphi(y)$, ce qui prouve que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3°) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$.
$\varphi(x) - \varphi(y) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{1+t^x} - \frac{1}{1+t^y}\Big)\, dt = \int_0^1 \frac{t^y - t^x}{(1+t^x)(1+t^y)}\, dt$, donc
$0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - t^y}{1 \times 1}\, dt = \int_0^1 (t^x - t^y)\, dt$.
De plus, $\displaystyle\int_0^1 (t^x - t^y)\, dt = \Big[\frac{t^{x+1}}{x+1} - \frac{t^{y+1}}{y+1}\Big]_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}$,
donc $\displaystyle\int_0^1 (t^x - t^y)\, dt = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} \leq y - x$.

4°) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
Lorsque $y \leq x$, en remplaçant dans la question précédente le couple (x,y) par (y,x), on obtient que $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq x - y = |x-y|$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, indépendamment de l'ordre entre x et y, $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq |y - x|$, or $|y-x| \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\varphi(y) - \varphi(x) \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0$, puis $\varphi(y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} \varphi(x)$.

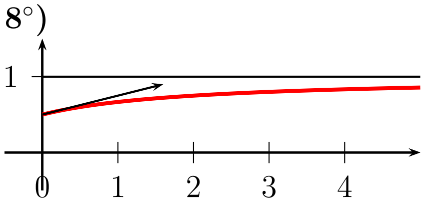
5°) Soit $x > 0$. $1 - \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+t^x}\Big)\, dx = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x}\, dt$, donc
$0 \leq 1 - \varphi(x) \leq \displaystyle\int_0^1 t^x\, dt = \frac{1}{x+1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Le principe des gendarmes permet à nouveau de conclure.

6°) Soit $x \geq 0$. On souhaite intégrer par parties, en primitivant $t \longmapsto 1$ et en dérivant $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^x}$, mais cela nécessite de dériver $t \longmapsto t^x$ sur $[0,1]$, ce qui pose un problème

en $t=0$ lorsque $x<1$. Pour contourner ce problème, on intègre par parties sur $[\varepsilon,1]$ où $\varepsilon>0$, puis on fait tendre ε vers 0.
Soit $\varepsilon\in]0,1[$. $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{1+t^x}=\Big[\frac{t}{1+t^x}\Big]_\varepsilon^1+\int_\varepsilon^1 t\frac{xt^{x-1}}{(1+t^x)^2}\,dt=\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^x}+x\int_\varepsilon^1\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,dt.$
Or $0\leq\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon^x}\leq\varepsilon$, donc d'après le principe des gendarmes, $\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon^x}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0$.
De plus, si f est une application continue sur $[0,1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle possède une primitive sur $[0,1]$, notée F. F est dérivable, donc continue, donc $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)\,dt=F(1)-F(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}F(1)-F(0)=\int_0^1 f(t)\,dt$. On en déduit, en faisant tendre ε vers 0 dans l'intégration par parties que $\displaystyle\varphi(x)=\frac{1}{2}+x\int_0^1\frac{t^x}{(1+t^x)^2}dt$.

7°) $\displaystyle\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\frac{1}{x}(\varphi(x)-\frac{1}{2})=\int_0^1\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\,dt,$
donc $\displaystyle\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\int_0^1\frac{t^x+1-1}{(1+t^x)^2}\,dt=\varphi(x)-\Psi(x)$, où $\displaystyle\Psi(x)=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^x)^2}$.
Nous allons montrer que Ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en nous inspirant de la question 4.
Soit $x,y\in\mathbb{R}_+$ avec $x<y$. On sait déjà que, pour tout $t\in[0,1]$, $t^x\geq t^y$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $\Psi(x)\leq\Psi(y)$. Ainsi,
$\displaystyle 0\leq\Psi(y)-\Psi(x)=\int_0^1\frac{(1+t^x)^2-(1+t^y)^2}{(1+t^x)^2(1+t^y)^2}\,dt\leq\int_0^1(t^{2x}+2t^x-t^{2y}-2t^y)\,dt,$
donc $\displaystyle 0\leq\Psi(y)-\Psi(x)\leq\int_0^1(t^x-t^y)(2+t^x+t^y)\,dt\leq4\int_0^1(t^x-t^y)dt.$
On en déduit que, pour tout $x,y\in\mathbb{R}_+$, $|\Psi(x)-\Psi(y)|\leq4|y-x|$, ce qui montre, de même qu'en question 4, que Ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, Ψ est continue en 0, donc $\Psi(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}\Psi(0)=\frac{1}{4}$.
Ainsi, $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\underset{x\to0}{\longrightarrow}\varphi(0)-\Psi(0)=\dfrac{1}{4}$.
Ceci prouve que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0)=\frac{1}{4}$.

8°)



9°) Soit $x>1$. $\dfrac{t^x-0}{t-0}=t^{x-1}\underset{t\to0}{\longrightarrow}0$, ainsi, $t\longmapsto t^x$ est dérivable en 0 et, pour tout $t\in[0,1]$, $\dfrac{d}{dt}(t^x)=xt^{x-1}$. On en déduit que, pour tout $t\in[0,1]$ (également pour $t=0$), $\dfrac{d}{dt}(\ln(1+t^x))=\dfrac{xt^{x-1}}{1+t^x}$, qui est continue sur $[0,1]$. On peut donc intégrer par parties :
$\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t^x}\,dt=\int_0^1\Big(\frac{t}{x}\Big)\frac{d}{dt}(\ln(1+t^x))\,dt=\Big[\frac{t}{x}\ln(1+t^x)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+t^x)}{x}\,dt,$

donc $1-\varphi(x) = \dfrac{\ln 2}{x} - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\ dt$.
Or, pour tout $u \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$ (pour le montrer, il suffit d'étudier $g(u) = u - \ln(1+u)$, dont la dérivée $g'(u) = 1 - \dfrac{1}{1+u}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(0) = 0$).
Ainsi, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\ dt \leq \int_0^1 t^x\ dt = \dfrac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $1-\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x}$.

Problème 2 : π est irrationnel.

1°) a) $f_1(x) = 2ax - bx^2$, donc $f_1'(x) = 2a - 2bx$.
En particulier, $f_1'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{a}{b} = r$.
Pour la suite de cette question, on posera $g = f_1$.
Premier cas : Supposons que $r > 0$.
Alors g' est positive sur $[0,r]$ et négative sur $[r,2r]$. donc $g(x)$ croît de 0 à $g(r)$ entre 0 et r, puis décroît de $g(r)$ à $g(2r)$ entre r et $2r$.
Or $g(r) = 2a\dfrac{a}{b} - b\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{a^2}{b}$ et $g(2r) = 2a.2r - b4r^2 = 4\dfrac{a^2}{b} - 4b\dfrac{a^2}{b^2} = 0$.
Ainsi, $\displaystyle\max_{x\in[0,2r]} g(x) = \dfrac{a^2}{b}$ et $\displaystyle\min_{x\in[0,2r]} g(x) = 0$.
Second cas : Supposons maintenant que $r < 0$ ($r \neq 0$ car $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$). Ainsi, $a < 0$.
$g'(x)$ est positif entre $2r$ et r, puis négatif entre r et 0, donc $g(x)$ croît entre $2r$ et r, de $g(2r) = 0$ à $g(r)$, puis décroît entre r et 0, de $g(r)$ à 0.
Ainsi, comme dans le premier cas, $\displaystyle\max_{x\in[0,2r]} g(x) = \dfrac{a^2}{b}$ et $\displaystyle\min_{x\in[0,2r]} g(x) = 0$.
1. b) Par inégalité triangulaire,
$|I_n| \leq \displaystyle\int_{\min(0,2r)}^{\max(0,2r)} |f_n(x)|\ dx \leq \int_{\min(0,2r)}^{\max(0,2r)} \dfrac{1}{n!}\Big(\dfrac{a^2}{b}\Big)^n\ dx = 2|r|\dfrac{\alpha^n}{n!}$, où $\alpha = \dfrac{a^2}{b}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $d_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ et montrons que $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{\alpha}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} \leq \dfrac{1}{2}$. Par récurrence sur n, on en déduit que, pour tout $n \geq N$, $0 \leq d_n \leq d_N(\frac{1}{2})^{n-N} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Il en résulte, par le principe des gendarmes, que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2°) a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{2r} \sin x\ dx = [-\cos x]_0^{2r} = 1 - \cos(2r)$, donc $I_0 = 2\sin^2 r$.
2. b) Effectuons deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^{2r} (2ax - bx^2) \sin x \ dx &= \Big[(2ax - bx^2)(-\cos x)\Big]_0^{2r} + \int_0^{2r} (\cos x)(2a - 2bx) \ dx \\ &= \Big[(2a - 2bx)(\sin x)\Big]_0^{2r} + \int_0^{2r} 2b \sin x \ dx, \end{aligned}$$

or $2a - 2b \times 2\frac{a}{b} = 2a - 4a = -2a$, donc $I_1 = \Big[2b(-\cos x)\Big]_0^{2r} - 2a\sin(2r)$
puis $I_1 = 2b(1 - \cos(2r)) - 2a\sin(2r) = 4b\sin^2 r - 4a \sin r \cos r$.
En conclusion, $I_1 = 4 \sin r(b \sin r - a \cos r)$.

3°) a) Soit $n \geq 2$. Une première intégration par parties donne
$I_n = \Big[f_n(x)(-\cos x)\Big]_0^{2r} + \int_0^{2r} f_n'(x) \cos x \ dx$, or $f_n(0) = f_n(2r) = 0$, d'après la première question, donc une seconde intégration par parties donne
$I_n = \Big[f_n'(x)\sin x\Big]_0^{2r} - \int_0^{2r} f_n''(x) \sin x \ dx$. Mais $f_n'(x) = (2a - 2bx)\dfrac{(2ax - bx^2)^{n-1}}{(n-1)!}$, donc toujours d'après la première question, $f_n'(0) = 0 = f_n'(2r)$ (car $n \geq 2$). Ainsi, $I_n = -\int_0^{2r} f_n''(x) \sin x \ dx$.

3. b) On a vu que $f_{n+1}'(x) = (2a - 2bx)f_n(x)$, donc

$$\begin{aligned} f_{n+2}''(x) &= -2bf_{n+1}(x) + (2a - 2bx)f_{n+1}'(x) \\ &= -2bf_{n+1}(x) + (2a - 2bx)^2 f_n(x) \\ &= 4a^2 f_n(x) - 2bf_{n+1}(x) + 4(b^2x^2 - 2abx)f_n(x) \\ &= 4a^2 f_n(x) - 2bf_{n+1}(x) - 4b(2ax - bx^2)f_n(x) \\ &= 4a^2 f_n(x) - 2bf_{n+1}(x) - 4b(n+1)f_{n+1}(x) \\ &= 4a^2 f_n(x) - bf_{n+1}(x)(2 + 4(n+1)). \end{aligned}$$

3. c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante : il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = 2(a_n \cos r + b_n \sin r)\sin r$.
Démontrons $R(n)$ par récurrence double :
Pour $n = 0$ et $n = 1$, $I_0 = 2\sin^2 r$ et $I_1 = 4 \sin r(b \sin r - a \cos r)$, donc $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$ et $R(n+1)$ et montrons $R(n+2)$.
$I_{n+2} = -\int_0^{2r} f_{n+2}''(x) \sin x \ dx = -4a^2 I_n + bI_{n+1}(4n+6)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $I_{n+2} = 2\sin r((4n+6)b(a_{n+1}\cos r + b_{n+1}\sin r) - 4a^2(a_n \cos r + b_n \sin r))$, ce qui prouve $R(n+2)$.

4°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2r \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $\sin(2r) \neq 0$.
$\dfrac{qI_n}{\sin(2r)} = \dfrac{q}{\cos r}(a_n \cos r + b_n \sin r) = qa_n + b_n q \tan r = qa_n + pb_n \in \mathbb{Z}$.

4. b) D'après la question 1.b, $\dfrac{qI_n}{\sin(2r)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{qI_n}{\sin(2r)}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, or $\dfrac{qI_n}{\sin(2r)} \in \mathbb{Z}$, donc pour tout $n \geq N$, $\dfrac{qI_n}{\sin(2r)} = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $I_n = 0$.

$a \neq 0$ car $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{4a^2}((4n+6)bI_{n+1} - I_{n+2})$. Ainsi, par une récurrence double descendante, on en déduit que pour tout $n \in \{0, \ldots, N+1\}$, $I_n = 0$. En particulier, $I_0 = 0$, or $I_0 = 2\sin^2 r$, donc $\sin r = 0$, ce qui est faux car $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

5°) Cette contradiction impose que $\tan r \notin \mathbb{Q}$. On a donc montré que, lorsque $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \tan r \notin \mathbb{Q}$. La contraposée donne $\tan r \in \mathbb{Q} \Longrightarrow r \notin \mathbb{Q}$.
Prenons $r = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $r \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et $\tan r = 1 \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$, puis $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Problème 3 : Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque x est un entier pair.

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R(n)$ l'assertion : P_n est une application polynomiale.
Pour $n = 1$, $R(1)$ est vraie d'après l'énoncé.
Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$.
Clairement, si Q est une application polynomiale, alors $t \longmapsto tQ(t)$ et $t \longmapsto t^2Q(t)$ sont polynomiales. De plus, si Q est l'application polynomiale $x \longmapsto a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x Q(t)dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_N\frac{x^{N+1}}{N+1}$, donc $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x Q(t)dt$ est encore polynomiale. D'après $R(n)$ et ces constatations, on en déduit que P_{n+1} est une application polynomiale, donc $R(n+1)$ est vraie.

2°) $m_1 = \displaystyle\int_0^1 \Big(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\Big)\,dx = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \int_0^x \Big(-\frac{t^3}{4} + \frac{t^2}{2}\Big)\,dt - x\int_0^x \Big(-\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}\Big)\,dt + \frac{x^2}{2}m_1 \\
&= -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{6} - x\Big(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4}\Big) + \frac{x^2}{12} \\
&= \frac{x^4}{4}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \frac{x^3}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\Big) + \frac{x^2}{12} \\
&= \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{12},
\end{aligned}$$

donc $m_2 = \dfrac{1}{240} - \dfrac{1}{48} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{12}\Big(\dfrac{1}{4\times 5} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{1}{12}\dfrac{3 - 15 + 20}{4\times 5\times 3} = \dfrac{1}{6\times 5\times 3}$.
En conclusion, $m_2 = \dfrac{1}{90}$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P'_{n+1}(x) = xP_n(x) - \displaystyle\int_0^x P_n(t)dt - xP_n(x) + xm_n$, donc $P'_{n+1}(x) = xm_n - \displaystyle\int_0^x P_n(t)dt$.
On en déduit que $P''_{n+1}(x) = m_n - P_n(x)$.

4°) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$.
◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :
$$\int_0^1 P_{n+1}(t)\cos(k\pi t)dt = \Big[P_{n+1}(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1 P'_{n+1}(t)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt,$$

donc à l'aide d'une nouvelle intégration par parties,
$\displaystyle\int_0^1 P_{n+1}(t)\cos(k\pi t)dt = \Big[P'_{n+1}(t)\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 P''_{n+1}(t)\frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\ dt$,
or on a vu que $P'_{n+1}(x) = xm_n - \displaystyle\int_0^x P_n(t)dt$, donc $P'_{n+1}(0) = 0 = P'_{n+1}(1)$.
Ainsi, en utilisant la relation $P''_{n+1}(x) = m_n - P_n(x)$,
on obtient $\displaystyle\int_0^1 P_{n+1}(t)\cos(k\pi t)dt = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\ dt - m_n\int_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\ dt$.
Cette dernière intégrale est nulle,
donc $\displaystyle\int_0^1 P_{n+1}(t)\cos(k\pi t)dt = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\ dt$, ce qui prouve que la suite $\displaystyle\Big(\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)dt\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{(k\pi)^2}$.

$\diamond$ On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)dt = \frac{I}{(k\pi)^{2(n-1)}}$,
où $I = \displaystyle\int_0^1 P_1(t)\cos(k\pi t)\ dt = \int_0^1 \Big(-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\Big)\cos(k\pi x)\ dx$.
Effectuons deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} I &= \Big[\Big(-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\Big)\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1 \Big(-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\ dx \\ &= \Big[\Big(-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Big)\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\cos(k\pi x)}{(k\pi)^2}\ dx, \end{aligned}$$

ainsi $I = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(k\pi)^2}$, puis $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)dt = -\frac{1}{2(k\pi)^{2n}}$.

5°) a) On vérifie que $P_1(0) = 0$ et d'après la définition de P_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(0) = 0$. Ainsi 0 est une racine de l'application polynomiale P_n. Alors, d'après le cours, il existe une application polynomiale Q_n telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$P_n(t) = tQ_n(t)$.

5. b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = -\sum_{k=1}^N \pi^{2n}2\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\ dt = -\pi^{2n}\int_0^1 Q_n(t)\sum_{k=1}^N 2t\cos(k\pi t)\ dt.$$

6°) a) $\dfrac{\sin t - \sin 0}{t-0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1$, donc par composition des limites,
$\dfrac{\sin(\frac{\pi t}{2})}{\frac{\pi t}{2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que $\dfrac{t}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \ell = \dfrac{2}{\pi}$.

6.b) Lorsque $x \neq 0$, on pose $\eta(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$ et on pose $\eta(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 1 + x\eta(x)$.
De plus, $\eta(x) = \dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \cos'(0) = \sin(0) = 0$.

6. c) Soit $t \in]0,1]$. $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \dfrac{\frac{t}{\sin(\frac{\pi}{2}t)} - \frac{2}{\pi}}{t} = \dfrac{t - \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)}{t\sin(\frac{\pi}{2}t)} = \dfrac{1-\frac{2}{\pi t}\sin(\frac{\pi}{2}t)}{\sin(\frac{\pi}{2}t)}$.

D'après l'énoncé, $\sin x = x + x^2\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,

donc $\dfrac{f(t)-f(0)}{t} = \dfrac{1 - \frac{2}{\pi t}(\frac{\pi t}{2} + (\frac{\pi t}{2})^2\varepsilon(\frac{\pi t}{2}))}{\sin\frac{\pi}{2}t} = -\dfrac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}t}\varepsilon\Big(\dfrac{\pi t}{2}\Big) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$,

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

6. d) Soit $t \in]0,1]$. $f'(t) = \dfrac{\sin\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}t\cos\frac{\pi t}{2}}{(\sin\frac{\pi}{2}t)^2}$.

D'après la question b, $\cos x = 1 + x\eta(x)$ où $\eta(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc

$\dfrac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2} = \dfrac{x + x^2\varepsilon(x) - x(1+x\eta(x))}{(x+x^2\varepsilon(x))^2} = \dfrac{x^2(\varepsilon(x)-\eta(x))}{x^2(1+x\varepsilon(x))^2} = \dfrac{\varepsilon(x)-\eta(x)}{(1+x\varepsilon(x))^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Par composition des limites, on en déduit que $f'(t) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$, donc f' est continue en 0. De plus f est de classe C^1 sur $]0,1]$ d'après le cours, donc f est bien C^1 sur $[0,1]$.

7°) a) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$.

$(a-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a^k = \sum_{k=0}^{N} a^{k+1} - \sum_{k=0}^{N} a^k = \sum_{k=1}^{N+1} a^k - \sum_{k=0}^{N} a^k = a^{N+1} - 1$.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1]$. On applique la question précédente avec $a = e^{i\pi t}$. On peut diviser par $1 - e^{i\pi t}$ car $\pi t \in]0,\pi]$. Ainsi,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N} e^{ik\pi t} = \dfrac{1-(e^{i\pi t})^{N+1}}{1-e^{i\pi t}} = \dfrac{e^{i\pi t\frac{N+1}{2}}\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{e^{i\pi\frac{t}{2}}\sin(\frac{\pi t}{2})} = \dfrac{\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})}e^{i\pi t\frac{N}{2}}$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1]$. En passant à la partie réelle, on déduit de la question précédente que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\cos(k\pi t) = \dfrac{\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})}\cos\Big(\pi t\dfrac{N}{2}\Big)$,

donc $2t\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t) = 2t\left(\dfrac{\sin(\frac{N+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{\pi t}{2})}\cos\Big(\pi t\dfrac{N}{2}\Big) - 1\right)$,

or $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$,

donc $2\sin\Big(\frac{N+1}{2}\pi t\Big)\cos\Big(\pi t\frac{N}{2}\Big) = \sin(N+\frac{1}{2})\pi t + \sin\frac{\pi t}{2}$.

Ainsi, $2t\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t) = t\Big(\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})\pi t}{\sin\frac{\pi t}{2}} - 1\Big) = -t + f(t)\sin\Big((N+\tfrac{1}{2})\pi t\Big)$.

Cette égalité est encore vraie, car évidente, lorsque $t = 0$.

8°) Intégrons par parties :

$\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\sin\Big((N+\tfrac{1}{2})\pi t\Big)\,dt = \Big[-\varphi(t)\dfrac{\cos(N+\frac{1}{2})\pi t}{(N+\frac{1}{2})\pi}\Big]_a^b + \int_a^b \dfrac{\cos(N+\frac{1}{2})\pi t}{(N+\frac{1}{2})\pi}\varphi'(t)\,dt$, donc

$\Big|\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\sin\Big((N+\tfrac{1}{2})\pi t\Big)\,dt\Big| \leq \dfrac{1}{(N+\frac{1}{2})\pi}\Big(|\varphi(b)| + |\varphi(a)| + \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt\Big) = \dfrac{C}{(N+\frac{1}{2})\pi}$,

où $C = |\varphi(b)| + |\varphi(a)| + \displaystyle\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$ ne dépend pas de N.

D'après le principe des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\sin\Big((N+\tfrac{1}{2})\pi t\Big)\,dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

9°) D'après les questions 5.b et 7.c,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n} \int_0^1 Q_n(t)(-t + f(t)\sin((N+\frac{1}{2})\pi t)\ dt$, or $\displaystyle\int_0^1 tQ_n(t)\ dt = m_n$. De plus,

f est de classe C^1 sur $[0,1]$, donc d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} m_n\pi^{2n}$.

On peut donc écrire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = m_n\pi^{2n}$.

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.