DM 5 : Formule d'Euler-Maclaurin

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni mardi 8 octobre.

Partie I : Les polynômes de Bernoulli

On définit par récurrence la suite d'applications $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en convenant que

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B_0(x) = 1$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$B_{n+1}(x) = (n+1)\left(\int_0^x B_n(t)\ dt - \int_0^1 \left(\int_0^u B_n(t)\ dt\right) du\right).$$

1°) En fonction de $x \in \mathbb{R}$, calculer $B_0(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$ et $B_4(x)$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que B_n est un polynôme de degré n.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\ dt = 0$.

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.
Qu'en déduit-on au sujet du graphe de B_n ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = B_n(0)$.

5°) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$.

6°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.

Partie II : la formule d'Euler-Maclaurin

Dans cette partie, f désigne une application de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

7°) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \int_0^1 f'(t)B_1(t)\ dt$.

8°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt = \;& \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \sum_{k=1}^{n}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))\frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ & - \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Il s'agit de la formule d'Euler-Maclaurin. On conviendra que lorsque $n = 0$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))\frac{b_{2k}}{(2k)!}$ est nulle.

9°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que B_{2n+1} est de signe constant et ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. Montrer que B_{2n+2} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et que B_{2n+2} s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$.

10°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que B_{2n+1} est de signe constant et ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$, que B_{2n+2} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et que B_{2n+2} s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$.

11°) Soient g et h deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t) \geq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 g(t)h(t)\,dt = g(c)\int_0^1 h(t)\,dt$.

12°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,dt = \;& \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \sum_{k=1}^{n}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))\frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ & - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(c).\end{aligned}$$

Partie III : Développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}$.

13°) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième de $t \longmapsto \dfrac{1}{t+a}$.

14°) Déduire de la question 12 que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_{p,n} \in [p, p+1]$ tel que $\displaystyle\ln(p+1) - \ln p = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p}\Big) + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}}\Big)\frac{b_{2k}}{2k} - \frac{b_{2n+2}}{c_{p,n}^{2n+3}}$.

15°) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln N = \Big(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\Big) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{N^{2k}} - 1\Big)\frac{b_{2k}}{2k} - b_{2n+2}\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}.$$

16°) On fixe $n \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Montrer que $0 \leq \dfrac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \displaystyle\int_{p-1}^{p} \frac{dt}{t^{2n+3}}$.

En déduire qu'il existe $S_n \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} S_n$.

Montrer que pour tout $N \geq 2$, $0 \leq S_n - \displaystyle\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}$.

17°) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,
$\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + \frac{b_{2n+2}}{2n+2} R_{n,N}$, avec $|R_{n,N}| \leq \dfrac{1}{(N-1)^{2n+2}}$.