

## DM 7 : un corrigé

### Partie I : Les polynômes de Bernoulli

1°) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

— D'après l'énoncé,  $B_0(x) = 1$ .

— Ainsi,  $\int_0^x B_0(t) dt = x$ , puis  $\int_0^1 \left( \int_0^u B_0(t) dt \right) du = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}$ ,

$$\text{donc } \boxed{B_1(x) = x - \frac{1}{2}}.$$

— Ainsi,  $2 \int_0^x B_1(t) dt = x^2 - x$ ,

puis  $2 \int_0^1 \left( \int_0^u B_1(t) dt \right) du = \int_0^1 (u^2 - u) du = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ ,

$$\text{donc } \boxed{B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}}.$$

— Ainsi,  $3 \int_0^x B_2(t) dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ ,

puis  $3 \int_0^1 \left( \int_0^u B_2(t) dt \right) du = \int_0^1 \left( u^3 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}u \right) du = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$ ,

$$\text{donc } \boxed{B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x}.$$

— Ainsi,  $4 \int_0^x B_3(t) dt = x^4 - 2x^3 + x^2$ , puis

$4 \int_0^1 \left( \int_0^u B_3(t) dt \right) du = \int_0^1 (u^4 - 2u^3 + u^2) du = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6 - 15 + 10}{30} = \frac{1}{30}$ ,

$$\text{donc } \boxed{B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}}.$$

2°) Posons  $R(n)$  l'assertion suivante :  $B_n$  est un polynôme de degré  $n$ .

$B_0 = 1$ , donc  $R(0)$  est vraie.

Supposons que  $n \in \mathbb{N}$  et que  $R(n)$  est vraie.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ , donc d'après  $R(n)$ ,

$x \mapsto \int_0^x B_n(t) dt$  est un polynôme de degré  $n+1$ .

Or  $B_{n+1}(x) = (n+1) \int_0^x B_n(t) dt + C$ , où  $C$  est une constante indépendante de  $x$ , donc  $B_{n+1}$  est un polynôme de degré  $n+1$ .

3°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après l'énoncé,

$$B_n(x) = n \int_0^x B_{n-1}(t) dt - C, \text{ où } C = n \int_0^1 \left( \int_0^u B_{n-1}(t) dt \right) du.$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^1 B_n(x) dx = n \int_0^1 \left( \int_0^x B_{n-1}(t) dt \right) du - C = C - C = 0.$$

4°)

◇ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(n)$  l'assertion suivante :

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ .

$B_0 = 1$ , donc  $R(0)$  est vraie.

$B_1 = (x \mapsto x - \frac{1}{2})$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $B_1(1-x) = \frac{1}{2} - x = -B_1(x)$ , ce qui prouve  $R(1)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $R(n)$  est vraie.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . D'après l'énoncé,

$$B_{n+1}(1-x) = (n+1) \int_0^{1-x} B_n(t) dt - C \text{ où } C = (n+1) \int_0^1 \left( \int_0^u B_n(t) dt \right) du.$$

En posant  $u = 1-t$ , on obtient que  $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = \int_1^x B_n(1-u)(-du)$ , donc d'après

$R(n)$ ,  $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = (-1)^{n+1} \int_1^x B_n(u) du$ , puis d'après la question 3, sachant que

$n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = (-1)^{n+1} \left( \int_1^x B_n(u) du + \int_0^1 B_n(u) du \right)$ , puis d'après la

relation de Chasles,  $\int_0^{1-x} B_n(t) dt = (-1)^{n+1} \int_0^x B_n(u) du$ .

$$\text{Ainsi, } B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} (n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C.$$

Si  $n$  est impair, alors  $(-1)^{n+1} = 1$ ,

$$\text{donc } B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} ((n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x).$$

Supposons maintenant que  $n$  est pair.

$$\text{Alors } B_{n+1}(1-x) = -(n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C = -B_{n+1}(x) - 2C.$$

$$\text{On en déduit que } \int_0^1 B_{n+1}(1-x) dx = - \int_0^1 B_{n+1}(x) dx - 2C.$$

$$\text{Or en posant } u = 1-x, \int_0^1 B_{n+1}(1-x) dx = \int_1^0 B_{n+1}(u)(-du) = \int_0^1 B_{n+1}(u) du,$$

donc  $-2C = 2 \int_0^1 B_{n+1}(x) dx = 0$ , d'après la question précédente. Ainsi,  $C = 0$

et on a encore  $B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1} ((n+1) \int_0^x B_n(t) dt - C) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x)$ , ce

qui prouve  $R(n+1)$  dans tous les cas.

◇ Supposons d'abord que  $n$  est pair. Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $B_n(1-t) = B_n(t)$ , donc en remplaçant  $t$  par  $\frac{1}{2} - x$ , on obtient que  $B_n(\frac{1}{2} + x) = B_n(\frac{1}{2} - x)$ , ce qui prouve que le graphe de  $B_n$  est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation  $x = \frac{1}{2}$ .

Supposons maintenant que  $n$  est impair. Alors  $B_n(\frac{1}{2} + x) = -B_n(\frac{1}{2} - x)$ , donc les deux points du graphe de  $B_n$ , de coordonnées  $(\frac{1}{2} - x, B_n(\frac{1}{2} - x))$  et  $(\frac{1}{2} + x, B_n(\frac{1}{2} + x))$ , ont constamment pour milieu le point de coordonnées  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Ainsi, le graphe de  $B_n$  est symétrique par rapport à ce dernier point.

5°) Soit  $n \geq 2$ . D'après l'énoncé,  $B_n$  est dérivable et  $B'_n = nB_{n-1}$ , or  $n-1 \geq 1$ , donc d'après la question 3,  $0 = n \int_0^1 B_{n-1}(t) dt = \int_0^1 B'_n(t) dt = B_n(1) - B_n(0)$ . Ceci démontre que  $B_n(1) = B_n(0) = b_n$ .

6°) On a en fait déjà montré cette propriété au sein de la récurrence de la question 4, lorsqu'on a prouvé que  $C = 0$  dans le cas où  $n$  était pair. On peut aussi écrire :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 4,

$B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(1-0) = (-1)^{2n+1} B_{2n+1}(0) = -b_{2n+1}$ , or d'après la question précédente,  $B_{2n+1}(1) = b_{2n+1}$ , car  $2n+1 \geq 2$ . Ainsi,  $b_{2n+1} = -b_{2n+1}$ , donc  $b_{2n+1} = 0$ .

## Partie II : la formule d'Euler-Maclaurin

7°)  $B'_1 = 1$ , donc  $B_1$  est une primitive de 1. Ainsi, par intégration par parties,  $\int_0^1 f(t) dt = [f(t)B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)B_1(t) dt$ . Or  $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ , donc  $B_1(0) = -\frac{1}{2}$  et  $B_1(1) = \frac{1}{2}$ . Ainsi, on a montré que  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 f'(t)B_1(t) dt$ .

8°) Notons  $R(n)$  la propriété de l'énoncé. D'après la question précédente,  $R(0)$  est vraie. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $R(n)$  et on montre  $R(n+1)$ . En intégrant par parties, sachant que  $\frac{B_{2n+2}}{2n+2}$  est une primitive de  $B_{2n+1}$ ,

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t) dt = \left[ f^{(2n+1)}(t) \frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2} \right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) \frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2} dt.$$

Or  $B_{2n+2}(1) = B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$ , car  $2n+2 \geq 2$ , donc

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t) dt = \frac{b_{2n+2}}{2n+2} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) - \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) \frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2} dt.$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t) dt = \left[ f^{(2n+2)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3} \right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3} dt.$$

Or  $B_{2n+3}(1) = B_{2n+3}(0) = 0$ , d'après la question 6. Ainsi,

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t) dt = - \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3} dt.$$

En combinant ces deux calculs, on obtient

$$\int_0^1 f^{(2n+1)}(t) B_{2n+1}(t) dt = \frac{b_{2n+2}}{2n+2} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) \frac{B_{2n+3}(t)}{(2n+2)(2n+3)} dt.$$

Alors, d'après  $R(n)$ ,

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) - \frac{1}{(2n+3)!} \int_0^1 f^{(2n+3)}(t) B_{2n+3}(t) dt,$$

ce qui démontre  $R(n+1)$ .

Le principe de récurrence permet de conclure.

**9°)**  $B'_{2n+2}(x) = (2n+2)B_{2n+1}(x)$ . Ainsi,  $B'_{2n+2}(x)$  est de signe constant  $]0, \frac{1}{2}[$ , donc par continuité,  $B'_{2n+2}(x)$  est de signe constant sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et s'annule au plus en 0 et en  $\frac{1}{2}$ . Ainsi, d'après le cours,  $B_{2n+2}$  est strictement monotone sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . Elle s'annule donc au plus une fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$ . De plus, si elle ne s'annulait pas sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle serait de signe constant sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , puis par continuité

sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . Mais nous allons montrer que  $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = 0$ , or  $B_{2n+2}$  est continue,

donc si elle était de signe constant sur  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $B_{2n+2}$  serait identiquement nulle sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , ce qui est faux car c'est un polynôme de degré  $2n+2$ . Ainsi  $B_{2n+2}$  s'annule une unique

fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$  ... si l'on montre que  $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = 0$  :

en posant  $x = 1 - t$ , on obtient  $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = \int_1^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(1-x)(-dx)$ , donc d'après

la question 4,  $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 B_{2n+2}(x) dx$ .

On en déduit que  $0 = \int_0^1 B_{2n+2}(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t) dt$ .

**10°)** Notons à nouveau  $R(n)$  la propriété de l'énoncé et démontrons-la par récurrence.  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ , donc  $B_1$  est strictement négatif sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

Alors d'après la question 9 avec  $n = 0$ ,  $B_2$  est strictement monotone sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et  $B_2$  s'annule une unique fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , donc  $R(0)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $R(n)$ .

Supposons d'abord que  $B_{2n+2}$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et notons  $c$  l'unique réel de  $]0, \frac{1}{2}[$  tel que  $B_{2n+2}(c) = 0$ . Ainsi,  $B_{2n+2}(x)$  est strictement négatif sur  $[0, c[$  et strictement positif sur  $]c, \frac{1}{2}]$ . Or  $B'_{2n+3} = (2n+3)B_{2n+2}$ , donc  $B_{2n+3}$  est strictement décroissante sur  $[0, c]$ , avec  $B_{2n+3}(0) = b_{2n+3} = 0$  d'après la question 6, puis elle est strictement croissante sur  $[c, \frac{1}{2}]$ , avec  $B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = 0$ , car d'après la question 4,  $B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = (-1)^{2n+3} B_{2n+3}(1 - \frac{1}{2}) = -B_{2n+3}(\frac{1}{2})$ .

Ainsi,  $B_{2n+3}$  est strictement négative sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

Dans l'autre cas, lorsque  $B_{2n+2}$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , en adaptant le raisonnement précédent, on montre que  $B_{2n+3}$  est strictement positive sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

Alors d'après la question 9, on en déduit que  $B_{2n+4}$  est strictement monotone sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et que  $B_{2n+4}$  s'annule une unique fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , ce qui prouve  $R(n+1)$ .

**11°)**  $g$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle est bornée et elle atteint ses bornes. Il existe donc  $m, M \in [0, 1]$  tels que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $g(m) \leq g(t) \leq g(M)$ . Soit  $t \in [0, 1]$ .  $h(t) \geq 0$ , donc  $g(m)h(t) \leq g(t)h(t) \leq g(M)h(t)$ . Par croissance de l'intégrale, on en déduit que  $g(m) \int_0^1 h(t) dt \leq \int_0^1 g(t)h(t) dt \leq g(M) \int_0^1 h(t) dt$ .

Premier cas : si  $\int_0^1 h(t) dt = 0$ , alors d'après l'encadrement précédent,

$$\int_0^1 g(t)h(t) dt = 0, \text{ et on peut écrire } \int_0^1 g(t)h(t) dt = g\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 h(t) dt.$$

Second cas : si  $\int_0^1 h(t) dt \neq 0$ , alors  $h$  étant positive,  $\int_0^1 h(t) dt > 0$ , donc l'encadrement

$$\text{devient } g(m) \leq \frac{\int_0^1 g(t)h(t) dt}{\int_0^1 h(t) dt} \leq g(M). \text{ Alors le théorème des valeurs intermédiaires,}$$

valable ici car  $g$  est continue, permet de conclure.

**12°)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si l'on reprend la démonstration de la question 8, on voit qu'à partir de  $R(n)$ , après la première intégration par parties, on a montré que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) B_{2n+2}(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad + \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^1 f^{(2n+2)}(t) (B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt. \end{aligned}$$

Supposons que  $B_{2n+2}$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . Alors, pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $B_{2n+2}(x) \geq B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$ .

De plus si  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $1-x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,

donc  $B_{2n+2}(x) = (-1)^{2n+2} B_{2n+2}(1-x) = B_{2n+2}(1-x) \geq b_{2n+2}$ ,

donc  $x \mapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$  est positive sur  $[0, 1]$ .

D'après la question 10, dans l'autre cas,  $B_{2n+2}$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . Alors un raisonnement similaire montre que  $x \mapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$  est négative sur  $[0, 1]$ .

En question 11, le résultat est encore valable lorsque  $h$  est négative sur  $[0, 1]$ , car il suffit d'appliquer la question 11 avec  $-h$ . Or on a vu que dans tous les cas,

$x \mapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ , donc d'après la question 11 généralisée, il existe  $c \in [0, 1]$  tel que

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt = f^{(2n+2)}(c) \int_0^1 (B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt.$$

D'autre part, d'après la question 3, )  $\int_0^1 B_{2n+2}(t) dt = 0$ ,

$$\text{donc } \int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2}) dt = -b_{2n+2} f^{(2n+2)}(c).$$

On a donc montré qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^n (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c). \end{aligned}$$

### Partie III : Développement asymptotique de $\sum_{p=1}^N \frac{1}{p}$ .

**13°)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(n)$  l'assertion suivante :  $\frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{1}{t+a} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(t+a)^{n+1}}$ .

On vérifie facilement  $R(0)$  et  $R(n) \implies R(n+1)$ , donc  $R(n)$  est vraie d'après le principe de récurrence.

**14°)** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Appliquons la question 12 avec la fonction  $f(t) = \frac{1}{t+p}$ , qui est bien de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$ .

On calcule  $\int_0^1 f(t) dt = [\ln(t+p)]_0^1 = \ln(p+1) - \ln p$ , donc d'après la question précédente, il existe  $c \in [0, 1]$  tel que

$$\begin{aligned} \ln(p+1) - \ln p &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{(-1)^{2k-1} (2k-1)!}{(p+1)^{2k}} - \frac{(-1)^{2k-1} (2k-1)!}{p^{2k}} \right) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(-1)^{2n+2} (2n+2)!}{(c+p)^{2n+3}}. \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}} \right) \frac{b_{2k}}{2k} \\ &\quad - \frac{b_{2n+2}}{(c+p)^{2n+3}}, \end{aligned}$$

ce qui conclut en posant  $c_{p,n} = c+p \in [p, p+1]$ .

**15°)** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Sommons la relation de la question précédente lorsque  $p$  varie de 1 à  $N-1$ .

$$\sum_{p=1}^{N-1} (\ln(p+1) - \ln p) = \sum_{p=2}^N \ln p - \sum_{p=1}^{N-1} \ln p = \ln N - \ln 1 = \ln N. \text{ De plus,}$$

$$\sum_{p=1}^{N-1} \left( \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} \right) = \sum_{p=2}^N \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p} = 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} - 1 - \frac{1}{N},$$

$$\text{donc } \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} \right) = \left( \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}.$$

Ensuite, par commutativité de l'addition,

$$\sum_{p=1}^{N-1} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}} \right) \frac{b_{2k}}{2k} = \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k} \sum_{p=1}^{N-1} \left( \frac{1}{(p+1)^{2k}} - \frac{1}{p^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k} \left( \frac{1}{N^{2k}} - 1 \right),$$

$$\text{donc on obtient bien } \ln N = \left( \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{N^{2k}} - 1 \right) \frac{b_{2k}}{2k} - b_{2n+2} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}.$$

**16°)**

◇ Pour tout  $t \in [p-1, p]$ ,  $c_{p,n} \geq t$ , donc  $\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{t^{2n+3}}$ . Alors, en intégrant entre  $p-1$  et  $p$ , on en déduit que  $0 \leq \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \int_{p-1}^p \frac{dt}{t^{2n+3}}$ .

◇ À l'aide de la relation de Chasles, on en déduit que, pour tout  $N \geq 3$ ,  $0 \leq \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{c_1^{2n+3}} + \int_1^{N-1} \frac{dt}{t^{2n+3}} \leq 1 + \left[ \frac{t^{-2n-2}}{-2n-2} \right]_1^{N-1} \leq 1 + \frac{1}{2n+2}$ . Ceci démontre

que la suite  $\left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \right)_{N \geq 3}$  est majorée, or elle est croissante, donc elle converge vers

un réel que l'on peut noter  $S_n$ .

◇ Soit  $N \geq 2$ . Soit  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $M \geq N$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{p=1}^M \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} &= \sum_{p=N}^M \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \int_{N-1}^M \frac{dt}{t^{2n+3}} = \left[ \frac{t^{-2n-2}}{-2n-2} \right]_{N-1}^M \\ &\leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $M$  vers  $+\infty$ , on en déduit que  $0 \leq S_n - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}$ .

**17°)** D'après la question 15,

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p} &= \ln N + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{N^{2k}} - 1 \right) \frac{b_{2k}}{2k} + b_{2n+2} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \\ &= \ln N + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k N^{2k}} + b_{2n+2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n \right) + \gamma_n, \end{aligned}$$

en posant  $\gamma_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2k} + b_{2n+2} S_n$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p}\right) - \ln N = \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + b_{2n+2} \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n\right) + \gamma_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \gamma_n, \text{ donc}$$

$\gamma_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} - \ln N\right)$ . Ceci prouve que  $\gamma_n$  ne dépend pas de  $n$ . On notera  $\gamma$  cette constante indépendante de  $n$  et de  $N$ . Ainsi,

$$\sum_{p=1}^N \frac{1}{p} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^n \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + \frac{b_{2n+2}}{2n+2} R_{n,N}, \text{ avec } R_{n,N} = (2n+2) \left(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n\right).$$

D'après la question précédente,  $|R_{n,N}| \leq \frac{1}{(N-1)^{2n+2}}$