

DM 8

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni jeudi 10 octobre.

Bases de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et lemme de Zorn

Partie 1 : familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notation. Tout au long de cette partie, on notera E , ou parfois $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Définition. Soit I un ensemble et $a = (\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par I . On dit que a est presque nulle si et seulement si $\{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$ est un ensemble fini.

Notation. On note \mathbb{R}^I l'ensemble de toutes les familles de réels indexées par I et on note $\mathbb{R}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de réels indexées par I .

1°) La famille $(1 + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle un élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$?

2°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{(I)}$.

Notation. Soit A une partie de E et $a = (\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$.

Si $B = \{f \in A \mid \alpha_f \neq 0\}$, alors $\sum_{f \in B} \alpha_f f$ est une somme finie d'applications de \mathbb{R} dans

\mathbb{R} . On convient de poser $\sum_{f \in A} \alpha_f f = \sum_{f \in B} \alpha_f f$.

3°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'élément de E défini par $f_k(x) = e^{(x^k)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor f_k$. Montrer que g est correctement définie.

Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq en \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1 \right)$.

Définition. Soit A une partie de E .

On dit que A est liée si et seulement si il existe $(\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$ telle que

— il existe $f \in A$ telle que $\alpha_f \neq 0$;

— $\sum_{f \in A} \alpha_f f = 0$.

4°) Montrer que $\{\exp, \text{ch}, \text{sh}\}$ est une partie liée de E .

Définition. Si A est une partie de E , on dit que A est libre si et seulement si A n'est pas liée.

5°) Soit A une partie de E . Montrer que A est libre si et seulement si, pour tout $(\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$, $\sum_{f \in A} \alpha_f f = 0 \implies (\forall f \in A, \alpha_f = 0)$.

6°) Montrer que $\{\text{ch}, \text{sh}, \text{th}\}$ est libre.

7°) Montrer que $\{x \mapsto \sin(x^n) / n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie libre de E .

8°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons c_n l'élément de E défini par $c_n(x) = \cos(nx)$ et notons s_n l'élément de E défini par $s_n(x) = \sin(nx)$. On note $A = \{c_n / n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{s_n / n \in \mathbb{N}^*\}$.

Pour tout $f, g \in A$ avec $f \neq g$, montrer que $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = 0$.

En déduire que A est libre.

Définition. Si A est une partie de E , on note $\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{f \in A} \alpha_f f / (\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)} \right\}$.

9°) On note B la réunion des deux parties de E définies en questions 7 et 8. Montrer que $\text{Vect}(B)$ est strictement inclus dans l'ensemble des applications de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Partie II : Existence d'une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition. Soit (E, \leq_E) un ensemble ordonné.

On dit qu'une partie A de E est totalement ordonnée si et seulement si la restriction de \leq_E sur A est un ordre total sur A .

10°) Démontrer que dans un ensemble ordonné (E, \leq) , toute partie finie, non vide et totalement ordonnée possède un maximum.

Définition. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et C une partie de E . On dit que C est un crible de E si et seulement si : $\forall x \in C, \forall y \in E, y \leq x \implies y \in C$.

Le fait que C est un crible de E sera noté $C \triangleleft E$.

Notation. Soit (A, \leq) un ensemble ordonné et $a \in A$. On note $A^{<a} = \{x \in A / x < a\}$ (on rappelle que $x < a$ signifie que $x \leq a$ et $x \neq a$).

11°) Soit (A, \leq) un ensemble ordonné et $a \in A$. Montrer que $A^{<a} \triangleleft A$.

12°) Soit (B, \leq) un ensemble ordonné et A une partie de B telle que $A \triangleleft B$. Montrer que, pour tout $a \in A$, $A^{<a} = B^{<a}$.

13°) Quels sont les cribles de \mathbb{Z} ?

Définition. Soit (E, \leq_E) un ensemble ordonné. On dit que E est inductif si et seulement si toute partie totalement ordonnée de E possède un majorant.

On admettra qu'en utilisant l'axiome du choix, on peut démontrer le théorème suivant :

Lemme de Zorn : tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.

Définition. Soit X un ensemble et \mathcal{E} une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$ (les éléments de \mathcal{E} sont donc des parties de X). On dit que \mathcal{E} est de caractère fini si et seulement si, pour tout $A \subset X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $A \in \mathcal{E}$;
- Toute partie finie B de A appartient à \mathcal{E} .

14°) Soit X un ensemble et \mathcal{E} une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$.

On suppose que \mathcal{E} est de caractère fini.

Montrer que, pour la relation d'inclusion, $\mathcal{E} \triangleleft \mathcal{P}(X)$.

Montrer que $\emptyset \in \mathcal{E}$.

15°) Soit X un ensemble et \mathcal{E} une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$.

On suppose que \mathcal{E} est de caractère fini.

Montrer que \mathcal{E} est inductif pour la relation d'inclusion.

16°) Notons à nouveau E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Montrer que l'ensemble des parties libres de E est de caractère fini.

Définition. Soit A une partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que A est une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si A est libre et $\text{Vect}(A) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

17°) En utilisant le lemme de Zorn, montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède au moins une base.

Partie III : théorème de Zermelo.

Définition. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. On dit que (E, \leq) est bien ordonné (ou bien que \leq est un bon ordre sur E) si et seulement si toute partie non vide de E possède un minimum. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation d'ordre \leq utilisée, on dit simplement que E est bien ordonné.

18°) Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Montrer que E est bien ordonné si et seulement si E est totalement ordonné et s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E strictement décroissante.

19°) Soit (E, \leq) un ensemble ordonné admettant un maximum noté m . Si $E \setminus \{m\}$ est bien ordonné, montrer que E est aussi bien ordonné.

20°) Soit X un ensemble quelconque. On note \mathcal{E} l'ensemble de tous les couples (A, R) tels que A est une partie de X et R est un bon ordre sur A .

Si (A, R) et (B, S) sont deux éléments de \mathcal{E} , on convient que $(A, R) \leq (B, S)$ si et seulement si

- $A \subset B$;
- pour tout $x, y \in A$, $x R y \iff x S y$;
- Dans l'ensemble ordonné (B, S) , $A \triangleleft B$.

Montrer que \leq est une relation d'ordre sur \mathcal{E} .

21°) Soit \mathcal{F} une partie totalement ordonnée de \mathcal{E} . Posons $M = \bigcup_{(A,R) \in \mathcal{F}} A$.

Lorsque $x, y \in M$, on convient que $x U y$ si et seulement si $x R y$, où $(A, R) \in \mathcal{F}$ avec $x, y \in A$.

Montrer que la relation binaire U est correctement définie et que c'est une relation d'ordre sur M .

22°) Avec les notations de la question précédente, montrer que (M, U) est bien ordonné.

23°) Montrer que \mathcal{E} est inductif.

24°) En utilisant le lemme de Zorn, en déduire le théorème de Zermelo :
montrer que tout ensemble X possède un bon ordre.