Feuille d'exercices 5.
Arithmétique.

Exercice 5.1 : (niveau 1).

Si x et y sont deux entiers relatifs impairs, montrez que $x^2 + y^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 5.2 : (niveau 1).

On considère les nombres de Fermat $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $F_n \mid F_{n+k} - 2$.

2°) En déduire que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 5.3 : (niveau 1).

Donner le chiffre des unités de $7^{(7^7)}$.

Exercice 5.4 : (niveau 1).

Déterminer le nombre de diviseurs de 10!.

Exercice 5.5 : (niveau 1).

Soit $a, b \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a^k divise b^{k+1}. Montrer que a divise b.

Exercice 5.6 : (niveau 1).

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq 2022}$ une famille d'entiers relatifs telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2022} a_i = 0$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2022} a_i^{37}$ est divisible par 399.

Exercice 5.7 : (niveau 2).

1°) Montrer que si le carré d'un rationnel est entier, ce rationnel est lui-même un entier.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

3°) En déduire que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice 5.8 : (niveau 2).
Soit p un nombre premier et $k \in \{1, \ldots, p-1\}$.
Montrer que p divise $\binom{p-1}{k} - (-1)^k$.

Exercice 5.9 : (niveau 2) Résoudre les systèmes suivants en l'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:
$\begin{cases} x \equiv 1\ [6] \\ x \equiv 2\ [7] \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x \equiv 2\ [5] \\ 5x \equiv 1\ [6] \end{cases}$

Exercice 5.10 : (niveau 2) Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels $3p+4$ est un carré parfait.

Exercice 5.11 : (niveau 2).
On suppose que a, b et c sont 3 entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
Montrer que 60 divise abc.

Exercice 5.12 : (niveau 2).
Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \equiv b[n]$. Montrer que $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Exercice 5.13 : (niveau 2)

1°) Par combien de 0 se termine le nombre 100!.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait qu'il existe une famille d'entiers naturels $(v_p)_{p \in \mathbb{P}}$ ne contenant qu'un nombre fini d'entiers non nuls telle que $n! = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p}$.
Donner une expression de v_p en fonction de n et p.

Exercice 5.14 : (niveau 3)
On note A l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k-1$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est infini.

Exercice 5.15 : (niveau 3) Déterminer les rationnels x, y tels que $x^2 + y^2 = 3$.

Exercice 5.16 : (niveau 3) Notons $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par :
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Notons $\mathcal{F} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}\}$.

1°) Montrer que si $(u_n), (v_n) \in \mathcal{F}$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est aussi dans $\mathcal{F}$.

2°) En déduire que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$.

3°) Montrer que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5.17 : (niveau 1) Déterminer les entiers relatifs x tels que $x-1$ divise $x+3$.

Exercice 5.18 : (niveau 1) Résoudre l'équation $3x^2 + xy = 11$, où les inconnues x et y sont dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.19 : (niveau 1) On considère une application $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$,

— $f(m, n) = f(n, m)$,
— $f(m, m) = m$,
— $f(m + n, n) = f(m, n)$.

Déterminer f.

Exercice 5.20 : (niveau 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise $n(n^2 + 5)$.

Exercice 5.21 : (niveau 1) Montrer que $11|(2^{123} + 3^{121})$.

Exercice 5.22 : (niveau 1) Calculer $10^{(10^n)}$ modulo 7 pour tout entier naturel n.

Exercice 5.23 : (niveau 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est à la fois le carré d'un entier et le cube d'un autre entier, alors c'est la puissance sixième d'un entier.

Exercice 5.24 : (niveau 1)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.
Montrer que ab et $a + b$ sont également premiers entre eux.

Exercice 5.25 : (niveau 1) Dans $\mathbb{N}$, montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 5.26 : (niveau 2) Montrer que 3^{101} divise $2^{(3^{100})} + 1$.

Exercice 5.27 : (niveau 2)

Montrer que pour tout entier n positif, $n4^{n+1} - (n + 1)4^n + 1$ est divisible par 9.

Exercice 5.28 : (niveau 2) Pour tout entier naturel n, on désigne par $f(n)$ la somme des chiffres de l'écriture de n en base 10.
Calculez $fofof(N)$, où $N = 4444^{4444}$.

Exercice 5.29 : (niveau 2) Montrez que si α, β et γ sont trois rationnels tels que $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$ alors ils sont tous trois nuls.

Exercice 5.30 : (niveau 2) Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
Déterminer n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Exercice 5.31 : (niveau 2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Posons $a = m!$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, $\alpha_i = a(i + 1) + 1$. Montrer que $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 5.32 : (niveau 2) On suppose que n est un carré parfait à 4 chiffres, tous inférieurs ou égaux à 6. Si on ajoute 3 à chacun de ces chiffres, on suppose qu'on obtient encore un carré parfait. Trouver n.

Exercice 5.33 : (niveau 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier multiple de 2^n dont l'écriture décimale comporte exactement n chiffres, lesquels sont égaux à 1 ou à 2.

Exercice 5.34 : (niveau 2) Soient $a \geq 0$ et $n \geq 2$ deux entiers. Montrer les assertions suivantes.

1. Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Si $a^n + 1$ est premier, avec $a \geq 2$, alors n est pair.
3. Si $a^n + 1$ est premier, avec $a \geq 2$, alors a est pair et n est une puissance de 2.

Exercice 5.35 : (niveau 2) Soit p un nombre premier différent de 2 et de 5. Montrer que p divise l'un des éléments de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$.

Exercice 5.36 : (niveau 2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 5.37 : (niveau 2) *Fractions égyptiennes :* On se propose de montrer que tout rationnel de $]0, 1[$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts.

1°) Soit $x = \frac{m}{n}$ un rationnel de $]0, 1[$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de n par m.
Si x n'est pas l'inverse d'un entier, montrer qu'il existe m', n'
tels que $x - \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{m'}{n'}$ avec $n' \in \mathbb{N}^*$ et $m' \in \{1, \ldots, m-1\}$.

2°) Conclure.

3°) Ecrire $\frac{5}{17}$ comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts.

Exercice 5.38 : (niveau 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le $n$ième nombre premier : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ etc.

Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i \geq p_{n+1} + p_{n+2}$.

Exercice 5.39 : (niveau 3) (d'après Rallye mathématique d'Alsace 2012)
Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres différents et tous non nuls.
Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles que je peux former avec deux de ces quatre chiffres, dans un sens ou dans un autre, et que je la multiplie par 7, je retrouve mon code.
Sans utiliser un programme informatique, former un raisonnement pour retrouver est code ?

Exercice 5.40 : (niveau 3) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a \wedge b = 1$.
On suppose que ab est la puissance k-ème d'un entier.

Démontrer que a et b sont (au signe près) des puissances k-èmes d'entiers.

2°) Résoudre l'équation $x^2 + x = y^k$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$.

3°) Soit $p \in \mathbb{P}$. Résoudre l'équation $x^2 + px = y^2$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$.
Indication : Distinguer le cas où p divise x du cas contraire.

Exercice 5.41 : (niveau 3) Soient $n \in \mathbb{Z}$ et p un entier premier supérieur à 3 tel que p divise $n^2 + 1$.
On définit sur $\mathbb{N}_{p-1}$ une relation binaire $\sim$ en convenant que, pour tout $x, y \in \mathbb{N}_{p-1}$, $x \sim y \Longleftrightarrow \exists k \in \{0, 1, 2, 3\}, y \equiv n^k x[p]$.

1°) Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

2°) Montrer que p ne divise ni $n - 1$, ni $n^2 - 1$, ni $n^3 - 1$.

3°) En déduire que $p \equiv 1[4]$.

Exercice 5.42 : (niveau 3) Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs non nuls n'est jamais une puissance, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $(n - 1)n(n + 1)$ n'est jamais égal à m^k avec $m, k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$.