DM 6 : Loi 0-1 de Kolmogorov
un corrigé

Partie I : Tribus

1°) $\mathcal{P}(\Omega)$ contient Ω, est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable, donc $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, et c'est clairement la plus grande.
$\{\emptyset, \Omega\}$ contient Ω et est stable par passage au complémentaire, de plus, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\{\emptyset, \Omega\}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est égal à $\emptyset$ si tous les F_n sont vides et à Ω sinon. Ainsi, $\{\emptyset, \Omega\}$ est stable par réunion dénombrable, donc c'est une tribu. De plus, toute tribu de Ω contient Ω et son complémentaire, égal à $\emptyset$, donc $\{\emptyset, \Omega\}$ est la plus petite tribu de Ω.

2°) Posons $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$.
$\mathcal{F}$ contient Ω et est stable par passage au complémentaire.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Posons $\mathcal{G} = \{F_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.
Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B$: en effet, pour tout $x \in \Omega$,
$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Longleftrightarrow [\exists n \in \mathbb{N},\ \ x \in F_n] \Longleftrightarrow [\exists B \in \mathcal{G},\ \ x \in B]$,
or $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, donc $\bigcup_{B\in\mathcal{G}} B \in \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$, car $A \cup \overline{A} = \Omega$. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.
De plus, si $\mathcal{F}'$ est une tribu contenant A, alors elle contient Ω en tant que tribu, puis $\emptyset$ et $\overline{A}$ par passage au complémentaire, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.
Ainsi, $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est la plus petite tribu contenant A.

3°) $\diamond$ Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$.
$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{F}_n \in \mathcal{F}$. Alors par stabilité par réunion dénombrable, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F}_n \in \mathcal{F}$, puis à nouveau par passage au complémentaire, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{F}_n} \in \mathcal{F}$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $F_0, \ldots, F_n$ $n+1$ éléments de $\mathcal{F}$.

Pour tout $k > n$, posons $F_k = \Omega$. Alors $\bigcap_{0 \le k \le n} F_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \in \mathcal{F}$ d'après le point précédent.
Posons maintenant, pour tout $k > n$, $F_k = \emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$. Alors $\bigcup_{0 \le k \le n} F_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \in \mathcal{F}$.

4°) Soit $a \in]-1, 1[$. $a - 1 \neq 0$, donc d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - a}$, donc la série $\sum a^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k$. Or en posant $h = k + 1$, $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{h=1}^{n+1} a_h = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$, donc $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.
On en déduit que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est convergente si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = (\lim_{n \to +\infty} a_n) - a_0$.

6°) $\diamond$ Posons, pour tout entier n, $F_n = \emptyset$. Alors $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, donc, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(\emptyset)$, la série $\sum p_n$ est convergente. Supposons que $P(\emptyset) \neq 0$, alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} p_k = (n+1)P(\emptyset) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $P(\emptyset) > 0$), ce qui est faux. Ainsi, $P(\emptyset) = 0$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$, et $F_0, \ldots, F_n$ des éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.
Posons, pour tout $p > n$, $F_p = \emptyset$. Alors $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, donc $P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} P(F_k)$, or pour tout $N \ge n$, $\sum_{k=0}^{N} P(F_k) = \sum_{k=0}^{n} P(F_k) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} P(F_k)$, donc $P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\Big) = \sum_{k=0}^{n} P(F_k)$.
$\diamond$ Soit $F \in \mathcal{F}$. Appliquons la propriété précédente avec $n = 1$, $F_0 = F$ et $F_1 = \overline{F}$.
Ainsi, $P(F) + P(\overline{F}) = P(F \cup \overline{F}) = P(\Omega) = 1$. On en déduit que $P(\overline{F}) = 1 - P(F)$.
$\diamond$ Soit $G, H \in \mathcal{F}$ avec $G \subset H$.
$H \setminus G = H \cap \overline{G} \in \mathcal{F}$ d'après la question 3. De plus, H est la réunion disjointe de G et de $H \setminus G$, donc $P(H) = P(G) + P(H \setminus G)$. Subséquemment, $P(H \setminus G) = P(H) - P(G)$.

7°) Posons $\mathcal{G} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$.
Cette intersection est bien définie d'après le cours car I est non vide.
Pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}_i$ étant une tribu, il contient Ω, donc $\Omega \in \mathcal{G}$.
Soit $A \in \mathcal{G}$. Soit $i \in I$: $A \in \mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}_i$ est une tribu, donc $\overline{A} \in \mathcal{F}_i$. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc $A \in \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{G}$ est stable par passage au complémentaire.

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{G}$. Soit $i \in I$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}_i$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{F}_i$. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{G}$.
Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est bien une tribu.

8°) Notons $\mathbb{F}$ l'ensemble des tribus contenant $\mathcal{A}$. $\mathbb{F}$ est non vide car $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathbb{F}$. Alors d'après la question précédente, $\bigcap_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathcal{F}$ est une tribu sur Ω. Elle contient $\mathcal{A}$ en tant qu'intersection de parties contenant $\mathcal{A}$. De plus, si $\mathcal{G}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{G} \in \mathbb{F}$, donc $\bigcap_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Ceci démontre que $\bigcap_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathcal{F}$ est la plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{A}$. On peut donc bien définir cette notion.

9°) $\diamond$ Supposons que (F_n) est croissante pour l'inclusion.
Pour tout $n \geq 1$, posons $G_n = F_n \setminus F_{n-1} \in \mathcal{F}$ et posons $G_0 = F_0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \subset F_n$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x \in F_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un minimum, que l'on note m. Si $m = 0$, alors $x \in F_0 = G_0$. Si $m > 0$, alors $x \in F_m \setminus F_{m-1} = G_m$, donc dans tous les cas, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Subséquemment, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et donc $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n\Big)$.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. Alors $G_m \subset F_m \subset F_{n-1}$,
donc $(G_m \cap G_n) \subset F_{n-1} \cap (F_n \setminus F_{n-1}) = \emptyset$. En conséquence, les éléments de la suite (G_n) sont deux à deux disjoints. On en déduit que la série $\sum P(G_n)$ est convergente et que $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P(G_n)$. Alors, d'après la question 6, $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = P(F_{n-1})$ et $a_0 = 0$. D'après la question 5, la suite (a_n) est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = (\lim_{n\to+\infty} a_n) - a_0$. On en déduit que la suite $(P(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (ce que l'on pouvait obtenir directement en remarquant que c'est une suite croissante et majorée par 1) et que $P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n)$.

$\diamond$ Supposons maintenant que (F_n) est décroissante pour l'inclusion.
Passons aux complémentaires : la suite $(\overline{F_n})$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{F}$, donc, en utilisant la question 6, $P\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{F_n}\Big) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{F_n})$, puis

$$P\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n\Big) = 1 - \lim_{n\to+\infty} (1 - P(F_n)) = \lim_{n\to+\infty} P(F_n).$$

Partie II : lemme des classes monotones

10°) Soit $\mathcal{T}$ une tribu de Ω. Soit $A, B \in \mathcal{T}$ avec $A \subset B$. Alors $\overline{A} \in \mathcal{T}$, puis d'après la question 3, $A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{T}$ est stable par différence. De plus, $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable, donc a fortiori par réunion dénombrable croissante. En conclusion, $\mathcal{T}$ est bien une classe monotone.

11°) Soit $A \in \mathcal{M}$. $\Omega \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ est stable par différence, donc $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est stable par passage au complémentaire.
Soit $A, B \in \mathcal{M}$. $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, or $\mathcal{M}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire, donc $A \cup B \in \mathcal{M}$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$, alors $\displaystyle\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k \in \mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est stable par réunion finie.
Soit maintenant $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{M}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = \displaystyle\bigcup_{0 \leq k \leq n} A_k$. Alors $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (B_n) est croissante, donc par stabilité par réunion croissante dénombrable, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$, donc $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. $B_m = \displaystyle\bigcup_{0 \leq k \leq m} A_k \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, donc $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Ainsi, on a montré que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable.
En conclusion, $\mathcal{M}$ est une tribu.

12°) On adapte facilement la démonstration de la question 7 pour montrer que, si I un ensemble non vide et si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille de classes monotones, alors $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$ est encore une classe monotone. On peut alors adapter la question 8 et montrer que, en notant $\mathbb{M}$ l'ensemble des classes monotones contenant $\mathcal{A}$, qui est non vide car $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathbb{M}$, $\displaystyle\bigcap_{\mathcal{M} \in \mathbb{M}} \mathcal{M}$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{A}$ et que c'est la plus petite au sens de l'inclusion.

13°) Posons $\mathcal{A} = \{]-\infty, t] \ / \ t \in \mathbb{R}\}$, qui est bien inclus dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Soit $A, B \in \mathcal{A}$. Il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tel que $A =]-\infty, t]$ et $B =]-\infty, s]$.
Alors $A \cap B =]-\infty, \min(t, s)]$, donc $A \cap B \in \mathcal{A}$. Ceci montre que $\mathcal{A}$ est un π-système.

14°) $\diamond$ $m(\mathcal{A})$ est une classe monotone, donc $\Omega \in m(\mathcal{A})$.
De plus, $A \cap \Omega = A \in \mathcal{A} \subset m(\mathcal{A})$, donc $\Omega \in \mathcal{M}$.
$\diamond$ Soit $B, D \in \mathcal{M}$ tels que $B \subset D$.
$m(\mathcal{A})$ est une classe monotone, donc $D \setminus B \in m(\mathcal{A})$.
De plus, $A \cap (D \setminus B) = A \cap D \cap \overline{B} = (A \cap D) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap D) \setminus (A \cap B)$, or $A \cap B \subset A \cap D$ et $A \cap B$ et $A \cap D$ sont dans $m(\mathcal{A})$ qui est une classe monotone. Ainsi,

$A \cap (D \setminus B) \in m(\mathcal{A})$, ce qui prouve que $D \setminus B \in \mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est stable par différence finie.
◇ Soit (B_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$. Alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in m(\mathcal{A})$.
De plus, par distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$, $A \cap \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap B_n)$,
or $(A \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $m(\mathcal{A})$, qui est une classe monotone, donc $A \cap \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in m(\mathcal{A})$, ce qui prouve que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante.
En conclusion, $\mathcal{M}$ est une classe monotone.
◇ Lorsque $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$, car $\mathcal{A}$ est un π-système, donc $A \cap B \in m(\mathcal{A})$. Ainsi, $B \in \mathcal{M}$. On vient de montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{M}$ est plus grande, au sens de l'inclusion, que $m(\mathcal{A})$. Mais par définition de $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \subset m(\mathcal{A})$, donc $\mathcal{M} = m(\mathcal{A})$.

15°) D'après la question 14, pour tout $A \in \mathcal{A}$, pour tout $B \in m(\mathcal{A})$, $A \cap B \in m(\mathcal{A})$.
Fixons maintenant $A \in m(\mathcal{A})$ et posons $\mathcal{M} = \{B \in m(\mathcal{A}) \ / \ A \cap B \in m(\mathcal{A})\}$.
Alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. De plus, de même qu'en question 14, on montre que $\mathcal{M}$ est une classe monotone, donc $\mathcal{M}$ contient $m(\mathcal{A})$, puis $\mathcal{M} = m(\mathcal{A})$.
Ceci démontre que, pour tout $A, B \in m(\mathcal{A})$, $A \cap B \in m(\mathcal{A})$, donc que $m(\mathcal{A})$ est stable par intersection finie. Alors, d'après la question 11, $m(\mathcal{A})$ est une tribu. Cette tribu contient $\mathcal{A}$, donc $\sigma(\mathcal{A}) \subset m(\mathcal{A})$.
De plus, d'après la question 10, $\sigma(\mathcal{A})$ est une classe monotone, elle contient $\mathcal{A}$, donc $m(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. On a ainsi bien démontré que $m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$

Partie III : indépendance

16°) On vérifie par double inclusion que $\overline{G} \cap H = H \setminus (H \cap G)$, donc d'après la question 6, $P(\overline{G} \cap H) = P(H) - P(H \cap G) = P(H) - P(H)P(G)$, car G et H sont indépendants.
Ainsi, $P(\overline{G} \cap H) = P(H)(1 - P(G)) = P(H)P(\overline{G})$, ce qui prouve que $\overline{G}$ et H sont indépendants.

17°) D'après la question 2, $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ et $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\}$.
Ainsi, si $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{B\})$ sont indépendantes, il est évident que A et B sont indépendants.
Réciproquement, supposons que A et B sont indépendants.
Si $C \in \mathcal{F}$, $P(C \cap \emptyset) = 0 = P(C)P(\emptyset)$ et $P(C \cap \Omega) = P(C) = P(C)P(\Omega)$, donc tout élément de $\mathcal{F}$ est indépendant avec $\emptyset$ et avec Ω.
De plus, d'après la question précédente, A est indépendant de $\overline{B}$, donc A est indépendant de tout élément de $\sigma(\{B\})$.
D'après la question 16, $\overline{A}$ est indépendant de B, donc en appliquant à nouveau la question 16, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$. Finalement, on a montré que tous les élements de $\sigma(\{A\})$ sont indépendants de tous les éléments de $\sigma(\{B\})$. Ainsi, $\sigma(\{A\})$ et $\sigma(\{B\})$ sont indépendantes.

18°) Soit $B \in \mathcal{A}_2$. Posons $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}_1) \ / \ P(A \cap B) = P(A)P(B)\}$.
$\sigma(\mathcal{A}_1)$ est une tribu, donc $\Omega \in \mathcal{M}$.
Soit $A, D \in \mathcal{M}$ avec $A \subset D$. $\sigma(\mathcal{A}_1)$ est une tribu, donc une classe monotone, donc $D \setminus A \in \sigma(\mathcal{A}_1)$. De plus, on a déjà vu que $(D \setminus A) \cap B = (D \cap B) \setminus (A \cap B)$, or $(A \cap B) \subset (D \cap B)$, donc d'après la question 6,
$P((D \setminus A) \cap B) = P(D \cap B) - P(A \cap B) = (P(D) - P(A))P(B)$, car $A, D \in \mathcal{M}$, donc $P((D \setminus A) \cap B) = P(D \setminus A)P(B)$, ce qui prouve que $D \setminus A \in \mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est stable par différence.
Soit (A_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$. Alors $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{A}_1)$, car $\sigma(\mathcal{A}_1)$ est une tribu. De plus, $(A_n \cap B)$ est aussi une suite croissante, donc d'après la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$, puis d'après la question 9,

$$\begin{aligned} P\Big(\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \cap B\Big) &= P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)\Big) \\ &= \lim_{n \to +\infty} P(A_n \cap B) \\ &= \lim_{n \to +\infty} P(A_n)P(B) \text{ (car } A_n \in \mathcal{M}) \\ &= P(B) \lim_{n \to +\infty} P(A_n) \\ &= P(B)P\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \text{ à nouveau grâce à la question 9.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$, ce qui prouve que $\mathcal{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante.
En conclusion, $\mathcal{M}$ est une classe monotone.

19°) Soit $B \in \mathcal{A}_2$. $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}_1) \ / \ P(A \cap B) = P(A)P(B)\}$ est une classe monotone, qui contient $\mathcal{A}_1$ car $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ est mutuellement indépendante, donc qui contient $m(\mathcal{A}_1)$. Mais $\mathcal{A}_1$ est un π-système, donc d'après le lemme des classes monotones, $\sigma(\mathcal{A}_1) = m(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{M}$. Ceci démontre que, parce que $\mathcal{A}_1$ est un π-système, la famille $(\sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2)$ est mutuellement indépendante.
On applique maintenant ce dernier résultat en remplaçant $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ par le couple $(\mathcal{A}_2, \sigma(\mathcal{A}_1))$, ce qui est possible car $\mathcal{A}_2$ est un π-système. On en déduit que la famille $(\sigma(\mathcal{A}_2), \sigma(\mathcal{A}_1))$ est mutuellement indépendante, ce qu'il fallait démontrer.

20°)
$\diamond$ Commençons par établir le lemme suivant : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
Soit $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille mutuellement indépendante de n parties de $\mathcal{F}$. Alors, pour tout $(A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, $\displaystyle\Big\{A_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1) \ / \ P\Big(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^n P(A_i)\Big\}$ est une classe monotone.
Pour cela, fixons $(A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$,
et posons $\displaystyle\mathcal{M} = \Big\{A_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1) \ / \ P\Big(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^n P(A_i)\Big\}$.

Lorsque $A_1 = \Omega$, $P\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i\Big) = P\Big(\bigcap_{\mathbf{2}\leq i\leq n} A_i\Big) = \prod_{i=2}^{n} P(A_i)$, d'après la mutuelle indépendance de $(\mathcal{A}_i)_{1\leq i\leq n}$, donc $\Omega \in \mathcal{M}$.
La suite de la preuve du lemme est analogue à la question 18, car, avec des notations évidentes, $(D \setminus A) \cap \bigcap_{2\leq i\leq n} A_i = \Big(D \cap \bigcap_{2\leq i\leq n} A_i\Big) \setminus \Big(A \cap \bigcap_{2\leq i\leq n} A_i\Big)$
et car $\Big(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p\Big) \cap \bigcap_{2\leq i\leq n} A_i = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \Big(B_p \cap \bigcap_{2\leq i\leq n} A_i\Big)$.
$\diamond$ Soit $n \geq 2$. Soit $(\mathcal{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille mutuellement indépendante de n parties de $\mathcal{F}$. On suppose de plus que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\mathcal{A}_i$ est un π-système.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, posons $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i \cup \{\Omega\}$. Alors les $\mathcal{B}_i$ sont encore des π-systèmes et $(\mathcal{B}_i)_{1\leq i\leq n}$ reste mutuellement indépendante.
Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Notons $R(k)$ la propriété suivante :
la famille $(\sigma(\mathcal{A}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{A}_k), \mathcal{B}_{k+1}, \ldots, \mathcal{B}_n)$ est mutuellement indépendante.
On vient de dire que $(\mathcal{B}_i)_{1\leq i\leq n}$ est mutuellement indépendante, donc $R(0)$ est vraie.
Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On suppose $R(k)$.
On peut alors appliquer le lemme à la famille $(\mathcal{B}_{k+1}, \sigma(\mathcal{A}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{A}_k), \mathcal{B}_{k+2}, \ldots, \mathcal{B}_n)$.
Ainsi, si l'on fixe $(A_1, \ldots, A_k) \in \sigma(\mathcal{A}_1) \times \cdots \times \sigma(\mathcal{A}_k)$
et $(A_{k+2}, \ldots, A_n) \in \mathcal{B}_{k+2} \times \cdots \times \mathcal{B}_n$,
alors l'ensemble $\mathcal{M} = \Big\{A_{k+1} \in \sigma(\mathcal{B}_{k+1}) \ / \ P\Big(\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)\Big\}$ est une classe monotone qui contient le π-système $\mathcal{B}_{k+1}$, donc $\mathcal{M}$ contient $m(\mathcal{B}_{k+1})$ qui est égal à $\sigma(\mathcal{B}_{k+1})$, d'après le lemme des classes monotones.
De plus, $\mathcal{A}_{k+1} \subset \mathcal{B}_{k+1}$, donc $\sigma(\mathcal{A}_{k+1}) \subset \sigma(\mathcal{B}_{k+1})$,
mais on a aussi $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{A}_{k+1} \cup \{\Omega\} \subset \sigma(\mathcal{A}_{k+1})$, donc $\sigma(\mathcal{B}_{k+1}) \subset \sigma(\mathcal{A}_{k+1})$, si bien que $\sigma(\mathcal{A}_{k+1}) = \sigma(\mathcal{B}_{k+1})$.
Comme les parties $\sigma(\mathcal{A}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{A}_k), \sigma(\mathcal{A}_{k+1}), \mathcal{B}_{k+2}, \ldots, \mathcal{B}_n$ possèdent toutes Ω comme élément, ceci démontre $R(k+1)$.
$\diamond$ Maintenant, si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est une famille mutuellement indépendante de π-systèmes de $\mathcal{F}$, ce qui précède montre que, pour toute partie finie J de I, la famille $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i\in J}$ est mutuellement indépendante, donc $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i\in I}$ est mutuellement indépendante.

Partie IV : Loi 0-1 de Kolmogorov

21°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} G_k$. Ainsi, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{F}$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Si $x \in \bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n$, alors pour tout $n \in \{0, \ldots, m-1\}$, $x \in A_m \subset A_n$, par décroissance de la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, donc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = H$. L'inclusion réciproque étant

claire, on a montré que $H = \bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n$.

Or, pour tout $n \geq m$, $A_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} G_k \in \bigcup_{k=m}^{+\infty} \mathcal{T}_k \subset \sigma\Big(\bigcup_{k=m}^{+\infty} \mathcal{T}_k\Big) = \mathcal{B}_m$, donc d'après la question 3, $H = \bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n \in \mathcal{B}_m$. C'est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc $H \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_\infty$.

22°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{D}_1$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{T}_k$, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des $\bigcap_{j\in J} A_j$, où J est un ensemble fini et où pour tout $j \in J$, $A_j \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{T}_k$. Alors $\mathcal{D}_1$ est un π-système.

De même, notons $\mathcal{D}_2$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \mathcal{T}_k$. Alors $\mathcal{D}_2$ est également un π-système.
La famille $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant mutuellement indépendante, et en tenant compte du fait que tout élément de $\mathcal{D}_1$ peut s'écrire sous la forme $\bigcap_{k=0}^{n} A_k$ où $A_k \in \mathcal{T}_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ (car $\Omega \in \mathcal{T}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) et que tout élément de $\mathcal{D}_2$ peut s'écrire sous la forme $\bigcap_{k=n+1}^{N} A_k$ où $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq n+1$ et où $A_k \in \mathcal{T}_k$ pour tout $k \in \{n+1, \ldots, N\}$, on voit que $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est indépendante, donc d'après la question 19, $(\sigma(\mathcal{D}_1), \sigma(\mathcal{D}_2))$ est indépendante.
De plus, $\mathcal{D}_1 \subset \sigma\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{T}_k\Big) = \mathcal{C}_n$, donc $\sigma(\mathcal{D}_1) \subset \mathcal{C}_n$, mais on a aussi que $\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{T}_k \subset \mathcal{D}_1$, donc $\mathcal{C}_n \subset \sigma(\mathcal{D}_1)$, donc $\mathcal{C}_n = \sigma(\mathcal{D}_1)$. De même, on montre que $\mathcal{B}_{n+1} = \sigma(\mathcal{D}_2)$, donc on a bien montré que $(\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_{n+1})$ est indépendante.

23°) $\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}_{n+1}$, donc $(\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_\infty)$ est indépendant. Donc si l'on pose $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_\infty)$ est indépendant.
Soit $A, B \in \mathcal{C}$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $A \in \mathcal{C}_n$ et $B \in \mathcal{C}_m$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m \leq n$. Alors $B \in \mathcal{C}_n$, or $\mathcal{C}_n$ est une tribu, donc $A \cap B \in \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est un π-système. $\mathcal{B}_\infty$ est également un π-système car c'est une tribu, en tant qu'intersection de tribus, donc d'après la question 19, $(\sigma(\mathcal{C}), \mathcal{B}_\infty)$ est indépendant.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n \subset \sigma(\mathcal{C})$, or $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu, donc $\mathcal{B}_0 = \sigma\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n\Big) \subset \sigma(\mathcal{C})$. Mais $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}_0$, donc $\mathcal{B}_\infty \subset \sigma(\mathcal{C})$.

On a montré que $(\sigma(\mathcal{C}), \mathcal{B}_\infty)$ est indépendant, donc $(\mathcal{B}_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ est mutuellement indépendante.
$\diamond$ Soit $A \in \mathcal{B}_\infty$. Alors $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, donc $P(A)^2 = P(A)$ ou encore $P(A)(P(A) - 1) = 0$. Ainsi, $P(A) \in \{0, 1\}$.

24°) $\diamond$ Soit $x \in \Omega$. $\{n \in \mathbb{N} \ / \ x \in G_n\}$ est infini si et seulement si c'est une partie non majorée de $\mathbb{N}$, donc si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$ tel que $x \in G_k$.
Ainsi, $x \in H \Longleftrightarrow \Big(\forall n \in \mathbb{N},\ \ x \in \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} G_k\Big)$, ce qui montre que $H = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} G_k\Big)$.
$\diamond$ La famille $(\{G_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties de $\mathcal{F}$ mutuellement indépendante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{G_n\}$ est un π-système, donc d'après la question 20, si l'on pose $\mathcal{T}_n = \sigma(\{G_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de tribus mutuellement indépendante.
Utilisons maintenant les notations de cette partie pour cette famille $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
$\diamond$ D'après la question 21, $H = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} G_k\Big)$ est un élément $\mathcal{B}_\infty$, donc d'après la question 23, $P(H) \in \{0, 1\}$.