DS 2

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

Pour $n \geq 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} e^{\frac{ik\pi}{n}}$.

Exercice 2 :

On note f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, xy - y^5)$.
f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 3 :

Calculez les primitives de $f(x) = (x^2 - 1)e^{3x}$.

Problème : Le théorème de Tychonov

Partie I : Topologies

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E si et seulement si on dispose des propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$;
- Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap B \in \mathcal{T}$;
- Pour tout ensemble I, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E, si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Soit d une application de E^2 dans $\mathbb{R}$. On dit que d est une distance sur E si et seulement si on dispose des propriétés suivantes :

— pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$;
— pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;
— pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
— pour tout $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1°) Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, on pose $d(x, y) = |x - y|$.
Montrer que d est une distance sur $\mathbb{C}$.

2°) On suppose que d est une distance sur un ensemble E.
Pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $B(a, r) = \{x \in E \ / \ d(a, x) < r\}$: cet ensemble est appelé la boule ouverte de centre a et de rayon r.
Lorsque A est une partie de E, on dit que A est un ouvert de E si et seulement si, pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.
Montrer que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E.
Montrer que, pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est effectivement un ouvert.

Par la suite, lorsque $\mathcal{T}$ est une topologie sur un ensemble E, les éléments de $\mathcal{T}$ seront appelés des ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$.

3°) On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $A_1, \ldots, A_n$ sont n éléments de $\mathcal{T}$, alors $\displaystyle\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{T}$.
Montrer qu'en général, une intersection d'une infinité d'ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{T}$.

Partie II : Topologie produit

On suppose que I est un ensemble non vide et que $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles non vides.
Pour tout $i \in I$, on suppose que $\mathcal{T}_i$ est une topologie sur E_i.
On note E l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que, pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.
On dit que E est le produit de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$.
Pour tout $i \in I$, si $x = (x_j)_{j \in I} \in E$, on note $p_i(x) = x_i$.

4°) Montrer que, pour tout $i \in I$, p_i est une application surjective de E dans E_i.

Une partie A de E est appelée un ouvert élémentaire si et seulement si

— il existe un ensemble J tel que
  — J est fini ;
  — $J \subset I$;
— Pour tout $j \in J$, il existe $A_j \in \mathcal{T}_j$ tel que
— $A = \{x \in E \ / \ \forall j \in J, \ p_j(x) \in A_j\}$.

5°) Montrer que A est un ouvert élémentaire de E si et seulement si A est le produit d'une famille d'ensembles à préciser.

6°) Montrer que $\emptyset$ est un ouvert élémentaire.
Montrer que l'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions d'ouverts élémentaires. Plus précisément, si A est une partie de E, $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si il existe un ensemble K et une famille $(A_k)_{k\in K}$ d'ouverts élémentaires telle que $A = \bigcup_{k\in K} A_k$.

7°) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.
$\mathcal{T}$ est appelée la topologie produit sur E.

Partie III : Espaces séparés

On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E. On dit que E est séparé (pour la topologie $\mathcal{T}$) si et seulement si, pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

8°) Donner un exemple d'ensemble E et de topologie $\mathcal{T}$ tels que E n'est pas séparé.

9°) On suppose que E est un ensemble et que d est une distance sur E.
On note $\mathcal{T}$ la topologie définie en question 2 à partir de la distance d.
Montrer que E est séparé pour la topologie $\mathcal{T}$.

10°) On reprend les notations et les hypothèses de la partie II.
Montrer que E est séparé pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, E_i est séparé pour la topologie $\mathcal{T}_i$.

Partie IV : Filtres

Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E si et seulement si on dispose des propriétés suivantes :

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$;
- pour tout $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- pour tout $A \in \mathcal{F}$, pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$.

11°) Soit E un ensemble de A une partie non vide de E.
Montrer que $\{B \in \mathcal{P}(E) \ / \ A \subset B\}$ est un filtre sur E.

12°) On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur un ensemble E. Soit $x \in E$.
Pour tout $V \in \mathcal{P}(E)$, on dira que V est un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$ et $U \subset V$.
Pour toute la suite de ce problème, on notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
Montrer que $\mathcal{V}(x)$ est un filtre sur E.

13°) Soit E un ensemble et $\mathbb{F}$ un ensemble non vide de filtres sur E tel que, pour tout $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathbb{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Montrer que $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$ est un filtre sur E.

14°) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{A}$ est non vide.
Montrer qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur E tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ si et seulement si toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \neq \emptyset$.

Partie V : Adhérence

On suppose jusqu'à la fin que E est un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{T}$.
Lorsque $A \subset E$, on dira simplement que A est ouvert pour dire que A est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$.
De même, pour tout $x \in E$, lorsque $V \in \mathcal{V}(x)$ (voir question 12), on dira simplement que V est un voisinage de x.

Lorsque A est une partie de E, on note $\overset{\circ}{A} = \{x \in E \ / \ A \in \mathcal{V}(x)\}$.

$\overset{\circ}{A}$ s'appelle l'intérieur de A.

15°) Soit A une partie de E.
Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est égal à la réunion des ouverts inclus dans A.

Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclus dans A.

Montrer que A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

Lorsque F est une partie de E, on dira que F est un fermé si et seulement si $E \setminus F$ est ouvert.

Si A est une partie de E, on pose $\overline{A} = E \setminus (\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}})$. $\overline{A}$ s'appelle l'adhérence de A. C'est le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de A.

16°) Soit A une partie de E.
Montrer que $\overline{A}$ est un fermé contenant A.
Montrer que A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Par la suite, on dira simplement que $\mathcal{F}$ est un filtre pour dire que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E.
Lorsque $\mathcal{F}$ est un filtre et que $x \in E$, on dit que x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$ si et seulement si $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.
On dit également que $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{V}(x)$.

17°) Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soit $x \in E$.
Si $\mathcal{F}$ converge vers x, montrer que x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

18°) Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soit x un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.
Montrer qu'il existe un filtre $\mathcal{F}'$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ et tel que $\mathcal{F}'$ converge vers x.

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si il est maximal au sens de l'inclusion, c'est-à-dire si et seulement si aucun filtre ne contient strictement $\mathcal{F}$.

19°) Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre et $x \in E$.
Montrer que $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

20°) Soit $\mathcal{F}$ un filtre. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \in \mathcal{F}$ ou $(E \setminus A) \in \mathcal{F}$.

Partie VI : Compacité

On dit que E est compact si et seulement si E est séparé et si, pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E (où I est un ensemble quelconque non vide) telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$ avec J finie et non vide telle que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

On admet le lemme de Zorn : soit $(G, \leq)$ un ensemble ordonné.
On appelle une chaîne de G toute partie de G qui est totalement ordonnée par $\leq$.
Lorsque toutes les chaînes de G sont majorées, G possède au moins un élément maximal.

21°) On suppose que E est séparé.
Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est compact ;
2. Tout filtre de E possède un point d'adhérence ;
3. Tout ultrafiltre de E converge vers un élément de E.

22°) On reprend les notations et les définitions de la partie II. Ainsi, E est le produit de la famille $(E_i)_{i \in I}$, chaque E_i est muni d'une topologie $\mathcal{T}_i$ et E est muni de la topologie produit $\mathcal{T}$.
On suppose que, pour tout $i \in I$, E_i est compact. Montrer que E est compact. Il s'agit du théorème de Tychonov (1930).