DS 2 : un corrigé

Le barème comporte un total de 68 points.

Exercices (sur 7 points)

Exercice 1 : (sur 2 points)

Par la formule du binôme de Newton,
$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}e^{\frac{ik\pi}{n}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{in\pi}{n}}=(1+e^{\frac{i\pi}{n}})^n+1=\Big(e^{\frac{i\pi}{2n}}.2\cos(\frac{\pi}{2n})\Big)^n+1,$$
donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}e^{\frac{ik\pi}{n}}=1+2^n i\Big(\cos\frac{\pi}{2n}\Big)^n$.

Exercice 2 : (sur 3 points)

$\diamond$ (sur 1 point) Soit $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$. Alors, d'après la formule de Bernoulli,
$$\begin{aligned}f(x,y)=f(x',y') &\iff x=x' \text{ et } xy-y^5=xy'-y'^5\\ &\iff x=x' \text{ et } (y-y')(x-(y^4+y^3y'+y^2y'^2+yy'^3+y'^4))=0\\ &\iff x=x' \text{ et } (y=y' \text{ ou } x=y^4+y^3y'+y^2y'^2+yy'^3+y'^4).\end{aligned}$$
Choisissons $y=1$, $y'=0$, $x=x'=y^4+y^3y'+y^2y'^2+yy'^3+y'^4=1$. Alors la dernière propriété est vérifiée, donc $f(x,y)=f(x',y')$, mais $(x,y)\neq(x',y')$, donc f n'est pas injective.

$\diamond$ (sur 2 points) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors
$f(x,y)=(a,b)\iff(x=a \text{ et } xy-y^5=b)\iff(x=a \text{ et } y^5-ay+b=0)$.
Posons, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $P(t)=t^5-at+b$. Alors $P(t)\underset{t\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty$ et $P(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, or P est un polynôme donc c'est une application continue. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y\in\mathbb{R}$ tel que $P(y)=0$. Dans ce cas, ce qui précède montre que (a,y) est un antécédent de (a,b) par f. Ainsi, f est surjective.

Exercice 3 : (sur 2 points)

On intègre deux fois par parties :

$\displaystyle\int f(x)\,dx = (x^2-1)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}2x\,dx = (x^2-1)\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\Big(2x\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx\Big)$, donc

$\displaystyle\int f(x)\,dx = (x^2-1)\frac{e^{3x}}{3} - 2x\frac{e^{3x}}{9} + \frac{2}{27}e^{3x} + k.$

Finalement, $\boxed{\displaystyle\int f(x)\,dx = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x-7)+k}$.

Problème : Le théorème de Tychonov

Partie I : Topologies (sur 9 points)

1°) (sur 1 point) Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$.
$d(x,y) = |x-y| \geq 0$.
$d(y,x) = |y-x| = |x-y| = d(x,y)$.
$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$, d'après l'inégalité triangulaire.
Ainsi, d est bien une distance sur $\mathbb{C}$.

2°) • (sur 2 points) Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de E.
⋄ Pour tout prédicat P, l'assertion $[\forall a \in \emptyset, P(a)]$ est vraie, donc on dispose de la propriété suivante : $\forall a \in \emptyset, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(a,r) \subset \emptyset$. Ainsi, $\emptyset \in \mathcal{T}$.
⋄ Soit $a \in E$. Alors $B(a,1) \subset E$, donc $E \in \mathcal{T}$.
⋄ Soit $A, B \in \mathcal{T}$. Soit $c \in A \cap B$.
$c \in A$ et $A \in \mathcal{T}$, donc il existe $r' > 0$ tel que $B(c,r') \subset A$.
De même,il existe $r'' > 0$ tel que $B(c,r'') \subset A$.
Posons $r = \min(r', r'') \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in B(c,r)$. Alors $d(c,x) < r \leq r'$,
donc $x \in B(c,r') \subset A$ et de même, $x \in B$. Ainsi, $B(c,r) \subset A \cap B$. On a donc montré que $\forall c \in A \cap B, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, B(c,r) \subset A \cap B$, donc $A \cap B \in \mathcal{T}$.
⋄ Soit I un ensemble et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$. Posons $B = \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$.
Soit $b \in B$. Il existe $i \in I$ tel que $b \in A_i$. Or $A_i \in \mathcal{T}$, donc il existe $r > 0$ tel que $B(b,r) \subset A_i$. Alors $B(b,r) \subset B$, ce qui prouve que $B \in \mathcal{T}$.
En conclusion, on a montré que $\mathcal{T}$ est bien une topologie.
• (sur 2 points) Soit $a \in E$ et $r > 0$.
Soit $b \in B(a,r)$. Posons $r' = r - d(a,b)$: $r' > 0$ car $b \in B(a,r)$, donc $d(a,b) < r$.
Soit $x \in B(b,r')$: d'après la définition d'une distance,
$d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + r' = r$, donc $x \in B(a,r)$. Ainsi, $B(b,r') \subset B(a,r)$.
On a montré que, pour tout $b \in B(a,r)$, il existe $r' > 0$ tel que $B(b,r') \subset B(a,r)$, donc $B(a,r)$ est bien un ouvert.

3°) $\diamond$ (sur 1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : Pour tout n-uplet $(A_1, \ldots, A_n)$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{T}$.

Pour $n = 1$, on a clairement $R(1)$, car $\bigcap_{1 \leq i \leq 1} A_1 = A_1$.

On suppose que $R(n)$ est vraie. Soit $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ un $(n+1)$-uplet d'éléments de $\mathcal{T}$. D'après $R(n)$, $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{T}$, or $A_{n+1} \in \mathcal{T}$, donc d'après la définition d'une topologie, $A_{n+1} \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\bigcap_{1 \leq i \leq n+1} A_i \in \mathcal{T}$, ce qui prouve $R(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

$\diamond$ (sur 3 points) Plaçons-nous sur $\mathbb{C}$ muni de la distance de la question 1 et prenons sur $\mathbb{C}$ la topologie définie en question 2. D'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(0, \frac{1}{n})$ est un ouvert, donc c'est un élément de $\mathcal{T}$.

Posons $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, \frac{1}{n})$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$z \in A \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z \in B(0, \frac{1}{n})) \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |z| < \frac{1}{n}$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z| < \frac{1}{n}$, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|z| \leq 0$, donc $z = 0$. La réciproque étant évidente, on a montré que $A = \{0\}$. Cependant, $0 \in A$ et, pour tout $r > 0$, $B(0, r)$ n'est pas incluse dans A (en effet, $\frac{r}{2} \in B(0, r) \setminus A$). Ainsi A n'est pas un ouvert. On a donc construit un contre-exemple qui prouve que, en général, lorsque $\mathcal{T}$ est une topologie, une intersection d'une infinité d'éléments de $\mathcal{T}$ n'est pas un élément de $\mathcal{T}$.

Partie II : Topologie produit (sur 7 points)

4°) (sur 1 point) Soit $i \in I$.

Par construction, lorsque $x \in E$, $p(x) \in E_i$, donc p est une application de E dans E_i.

Soit $y \in E_i$. Pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, $E_j \neq \emptyset$, donc il existe $x_j \in E_j$. Posons $x_i = y$ et $x = (x_i)_{i \in I}$. Alors $x \in E$ et $p_i(x) = x_i = y$. Ceci prouve que p est surjective.

5°) (sur 1 point) Soit A un ouvert élémentaire. Il existe $J \subset I$ avec J fini et pour tout $j \in J$, il existe $A_j \in \mathcal{T}_j$ tels que $A = \{x \in E \ / \ \forall j \in J,\ p_j(x) \in A_j\}$.

Lorsque $i \in I \setminus J$, posons $A_i = E_i$.

Notons B le produit de la famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$.

Pour tout $x = (x_i)_{i \in I} \in E$, $x \in B \iff (\forall i \in I,\ x_i \in A_i) \iff (\forall j \in J,\ x_j \in A_j)$, donc $x \in B \iff (\forall j \in J,\ p_j(x) \in A_j) \iff x \in A$. Ainsi, $A = B$, donc A est le produit d'une famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ tels que pour tout $i \in I$, $A_i = E_i$, sauf pour un nombre fini de i, pour lesquels A_i est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_i$.

Réciproquement, il est clair qu'un tel ensemble est bien un ouvert élémentaire.

6°) $\diamond$ (sur 1 point) I est non vide, donc il existe $i \in I$. Posons alors $A_i = \emptyset$. Pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, posons $A_j = E_j$. Posons enfin $A = \{x \in E \ / \ \forall j \in \{i\}, \ \ p_j(x) \in A_j\}$. Ainsi, A est un ouvert élémentaire. De plus $A = \{x \in E \ / \ p_i(x) \in \emptyset\} = \emptyset$, donc $\emptyset$ est bien un ouvert élémentaire.

$\diamond$ (sur 2 points) Soit A et B deux ouverts élémentaires. Il existe donc deux parties finies de I, notées J et K, et deux familles $(A_j)_{j\in J}$ et $(B_k)_{k\in K}$ avec pour tout $j \in J$, $A_j \in \mathcal{T}_j$ et pour tout $k \in K$, $B_k \in \mathcal{T}_k$, telles que $A = \{x \in E \ / \ \forall j \in J, \ \ p_j(x) \in A_j\}$ et $B = \{x \in E \ / \ \forall k \in K, \ \ p_k(x) \in B_k\}$.

Pour tout $i \in K \setminus J$, posons $A_i = E_i$ et pour tout $i \in J \setminus K$, posons $B_i = E_i$. Ainsi on dispose des familles $(A_j)_{j\in J\cup K}$ et $(B_k)_{k\in J\cup K}$. De plus, pour tout $x \in E$, $x \in A \Longleftrightarrow (\forall j \in J \cup K, \ \ p_j(x) \in A_j)$ et $x \in B \Longleftrightarrow (\forall j \in J \cup K, \ \ p_j(x) \in B_j)$, donc $A \cap B = \{x \in E \ / \ \forall j \in J \cup K, \ \ p_j(x) \in A_j \cap B_j\}$, or pour tout $j \in J \cup K$, $A_j \cap B_j \in \mathcal{T}_j$ et $J \cup K$ est fini, donc $A \cap B$ est bien un ouvert élémentaire.

7°) (sur 2 points) $\diamond$ Avec $K = \emptyset$, $\emptyset = \bigcup_{k\in\emptyset} A_k \in \mathcal{T}$.

$\diamond$ $E = \{x \in E \ / \ \forall j \in \emptyset, \ \ p_j(x) \in A_j\}$, car pour tout prédicat P, la propriété $[\forall j \in \emptyset, \ \ P(j)]$ est toujours vraie. Ainsi, $E \in \mathcal{T}$.

$\diamond$ Soit I un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$.

Pour tout $i \in I$, il existe un ensemble K_i et une famille d'ouverts élémentaires $(A_{k,i})_{k\in K_i}$ telle que $A_i = \bigcup_{k\in K_i} A_{k,i}$.

Alors $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{h\in H} A_h$, où $H = \{(k,i) \ / \ i \in I$ et $k \in K_i\}$. C'est bien une union d'ouverts élémentaires, donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

$\diamond$ Soit $A, B \in \mathcal{T}$. Il existe deux ensembles K et H ainsi que deux familles d'ouverts élémentaires $(A_k)_{k\in K}$ et $(B_h)_{h\in H}$ telles que $A = \bigcup_{k\in K} A_k$ et $B = \bigcup_{h\in H} B_h$.

Alors, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Longleftrightarrow (\exists k \in K, \ \ x \in A_k) \text{ et } (\exists h \in H, \ \ x \in B_h) \\ &\Longleftrightarrow (\exists (k,h) \in K \times H, \ \ x \in A_k \cap B_h), \end{aligned}$$

donc $A \cap B = \bigcup_{(k,h)\in K\times H} A_k \cap B_h$. Ainsi, d'après la question précédente, $A \cap B$ est une union d'ouverts élémentaires, donc $A \cap B \in \mathcal{T}$.

En conclusion, on a montré que $\mathcal{T}$ est une topologie.

Partie III : Espaces séparés (sur 10 points)

8°) (sur 2 points)

Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments a et b, avec $a \neq b$.

Posons $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$. On vérifie aisément que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E. Cependant, s'il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tel que $a \in U$ et $b \in V$, alors $U = V = E$, donc $U \cap V \neq \emptyset$. Ceci montre que E n'est pas séparé pour la topologie $\mathcal{T}$.

9°) (sur 2 points)
Soit $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors, par définition d'une distance, $d(x, y) > 0$.
Posons $r = \dfrac{d(x,y)}{2}$, $U = B(x, r)$ et $V = B(y, r)$. Il est alors clair que $x \in U$ et $y \in V$.
De plus, d'après la question 2, $U \in \mathcal{T}$ et $V \in \mathcal{T}$.
Supposons que $U \cap V \neq \emptyset$. Alors il existe $z \in E$ tel que $d(x, z) < r$ et $d(y, z) < r$. On en déduit que $2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r$, ce qui est impossible.
Ainsi, $U \cap V = \emptyset$.
Ceci prouve que E est séparé.

10°) $\diamond$ (sur 2 points) Supposons que pour tout $i \in I$, E_i est séparé.
Soit $x, y \in E$ tel que $x \neq y$. Posons $x = (x_i)_{i \in I}$ et $y = (y_i)_{i \in I}$.
$x \neq y$, donc il existe $j \in I$ tel que $x_j \neq y_j$.
E_j est séparé, donc il existe deux ouverts U et V de $\mathcal{T}_j$
tels que $x_j \in U$, $y_j \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
Notons $A = \{z \in E \ / \ p_j(z) \in U\}$ et $B = \{z \in E \ / \ p_j(z) \in V\}$. Alors U et V sont deux ouverts élémentaires de $\mathcal{T}$. On a clairement $x \in A$ et $y \in B$. De plus, si $z \in U \cap V$, alors $p_j(z) \in U \cap V = \emptyset$, ce qui est faux, donc $A \cap B = \emptyset$.
Ceci prouve que E est séparé.
$\diamond$ (sur 4 points) Supposons que E est séparé. Soit $i \in I$. Montrons que E_i est séparé.
Soit $a, b \in E_i$ tels que $a \neq b$.
Pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, E_j est non vide, donc il existe $x_j \in E_j$.
Posons alors $x = (x_j)_{j \in I}$, en convenant que $x_i = a$ et
posons $y = (y_j)_{j \in I}$, en convenant que $y_i = b$ et que, pour $j \in I \setminus \{i\}$, $y_j = x_j$.
Ainsi $x, y \in E$ avec $x \neq y$, or E est séparé, donc il existe deux ouverts de $\mathcal{T}$, U et V, tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
Par définition de $\mathcal{T}$, U est une union d'ouverts élémentaires, or $x \in U$, donc il existe un ouvert élémentaire U' tel que $x \in U' \subset U$. De même, il existe un ouvert élémentaire V' tel que $y \in V' \subset V$. Alors $U' \cap V' \subset U \cap V = \emptyset$, donc $U' \cap V' = \emptyset$.
Par définition des ouverts élémentaires, il existe deux parties finies de I, notées J et K, et il existe deux familles $(A_j)_{j \in J}$ et $(B_k)_{k \in K}$, avec pour tout $j \in J$, $A_j \in \mathcal{T}_j$ et pour tout $k \in K$, $B_k \in \mathcal{T}_k$, telles que $U' = \{x \in E \ / \ \forall j \in J,\ p_j(x) \in A_j\}$ et $V' = \{x \in E \ / \ \forall k \in K,\ p_k(x) \in B_k\}$.
Pour tout $j \in I \setminus J$, posons $A_j = E_j$ et pour tout $k \in I \setminus K$, posons $B_k = E_k$.
$x \in U'$, donc $a = x_i \in A_i$. De même, $y \in V'$, donc $b \in B_i$.
Il reste à montrer que $A_i \cap B_i = \emptyset$.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $c \in A_i \cap B_i$. Posons alors $z = (z_j)_{j \in I}$, en convenant que $z_i = c$ et que, pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, $z_j = x_j$.
Comme $x \in U'$, on en déduit que $z \in U'$. De même, comme $y \in V'$, on en déduit que $z \in V'$. Alors $U' \cap V' \neq \emptyset$, ce qui est faux. On a donc bien montré que E_i est séparé.

Partie IV : Filtres (sur 8 points)

11°) (sur 1 point) Notons $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{P}(E) \ / \ A \subset B\}$.
$A \not\subset \emptyset$, car A est non vide, donc $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
$A \subset E$, donc $E \in \mathcal{F}$.
Si $B, C \in \mathcal{F}$, alors $A \subset B \cap C$, donc $B \cap C \in \mathcal{F}$.
Enfin, si $B \in \mathcal{F}$ et si C est une partie de E telle que $B \subset C$, alors $A \subset C$, donc $C \in \mathcal{F}$.
En conclusion, $\mathcal{F}$ est bien un filtre sur E.

12°) (sur 2 points)
Si V est un voisinage de x, alors $x \in V$, donc $V \neq \emptyset$. Ainsi $\emptyset \notin \mathcal{V}(x)$.
$E \in \mathcal{T}$ et $x \in E \subset E$, donc $E \in \mathcal{V}(x)$.
Soit $V, W \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $U, U' \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U \subset V$ et $x \in U' \subset W$. Alors $x \in U \cap U' \subset V \cap W$, or $U \cap U' \in \mathcal{T}$, donc $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$ et $A \in \mathcal{P}(E)$ tels que $V \subset A$. Il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset V$. Alors $x \in U \subset A$, donc $A \in \mathcal{V}(x)$.
En conclusion, $\mathcal{V}(x)$ est un filtre sur E.

13°) (sur 2 points) Pour tout $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$, donc $\emptyset \notin \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$.

$\mathbb{F}$ est non vide, donc il existe $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$. $\mathcal{F}$ est un filtre, donc $E \in \mathcal{F}$. Alors $E \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$.

Soit $A, B \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$. Il existe $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathbb{F}$ tels que $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}'$. D'après l'énoncé, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Sans perte de généralité, supposons que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Alors $A, B \in \mathcal{F}'$, or $\mathcal{F}'$ est un filtre, donc $A \cap B \in \mathcal{F}'$, puis $A \cap B \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$.

Soit $A \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \subset B$. Il existe $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$ tel que $A \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est un filtre, donc $B \in \mathcal{F}$, puis $B \in \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$.

En conclusion, on a montré que $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$ est un filtre sur E.

14°) (sur 3 points) Supposons qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur E tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. En adaptant la preuve de la question 3, on montre que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est encore un élément de $\mathcal{F}$. Or $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, donc toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{F}$, donc est non vide car $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
Réciproquement, supposons que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide.
Posons $\mathcal{I} = \{ \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \ / \ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}_n, \ \ A_i \in \mathcal{A}\}$
et notons $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(E) \ / \ \exists B \in \mathcal{I}, \ \ B \subset A\}$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de E qui contiennent au moins une intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$.
Clairement $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, donc il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est un filtre.
Par hypothèse, $\emptyset \notin \mathcal{I}$, donc $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

$\mathcal{A}$ est non vide, donc il existe $A \in \mathcal{A}$ et $A \subset E$, donc $E \in \mathcal{F}$.
Si $A \in \mathcal{F}$ et si $A \subset C$, alors il est clair que $C \in \mathcal{F}$.
Soit maintenant $A, B \in \mathcal{F}$. Il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_{n+m} \in \mathcal{A}$ tels que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \subset A$ et $\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_{n+i} \subset B$. Alors $\bigcap_{1 \leq i \leq n+m} A_i \subset A \cap B$, donc $A \cap B \in \mathcal{F}$.
Ainsi, $\mathcal{F}$ est bien un filtre, ce qui conclut.

Partie V : Adhérence (sur 15 points)

15°) $\diamond$ (sur 2 points) Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des ouverts contenus dans A.
Ainsi, $\mathcal{A} = \{U \in \mathcal{T} \ / \ U \subset A\}$. Posons $B = \bigcup_{V \in \mathcal{A}} V$. Il s'agit de montrer que $\overset{\circ}{A} = B$.
Soit $x \in B$. Il existe $V \in \mathcal{A}$ tel que $x \in V$. Alors $V \in \mathcal{T}$ et $x \in V \subset A$, donc $A \in \mathcal{V}(x)$, donc $x \in \overset{\circ}{A}$.

Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors $A \in \mathcal{V}(x)$, donc il existe $V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in V \subset A$.
Alors $V \in \mathcal{A}$ et $x \in V$, donc $x \in B$.
On a bien montré que $\overset{\circ}{A} = B$.

$\diamond$ (sur 2 points) En particulier, $\overset{\circ}{A}$ est une réunion d'ouverts, donc c'est un ouvert.
De plus, $\overset{\circ}{A}$ est une réunion de parties incluses dans A, donc $\overset{\circ}{A} \subset A$.
$\diamond$ Si A est un ouvert, alors, avec les notations précédentes, $A \in \mathcal{A}$, donc $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{V \in \mathcal{A}} V \supset A$, or $\overset{\circ}{A} \subset A$, donc $\overset{\circ}{A} = A$.
Réciproquement, si $\overset{\circ}{A} = A$, alors A est ouvert car $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

16°) (sur 1 point) $\diamond$ $\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$ est un ouvert, donc son complémentaire $\overline{A}$ est un fermé.
$\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} \subset (E \setminus A)$, donc en passant au complémentaire, $\overline{A} \supset A$.
$\diamond$ $\overline{A}$ est fermé, donc si $A = \overline{A}$, A est fermé.
Réciproquement, si A est fermé, $E \setminus A$ est un ouvert, donc $\overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus A$, puis $\overline{A} = A$.

17°) (sur 2 points) On suppose que $\mathcal{F}$ converge vers x, c'est-à-dire que $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$.
Soit $A \in \mathcal{F}$. Supposons que $x \notin \overline{A}$. Alors $x \in \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$, donc $(E \setminus A) \in \mathcal{V}(x)$, or $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$, donc $(E \setminus A) \in \mathcal{F}$. On a aussi $A \in \mathcal{F}$, donc $\emptyset = (E \setminus A) \cap A \in \mathcal{F}$, ce qui est faux.

Ainsi, $x \in \overline{A}$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, donc $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$, ce qui prouve que x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

18°) (sur 4 points) Il s'agit de montrer qu'il existe un filtre contenant $\mathcal{A} = \mathcal{F} \cup \mathcal{V}(x)$. D'après la question 14, $\mathcal{A}$ étant non vide, il suffit de montrer toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide. Or $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}(x)$ sont deux filtres d'après la question 12, donc ils sont stables par intersection finie. Il suffit donc de montrer que, si $F \in \mathcal{F}$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $F \cap V \neq \emptyset$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $F \cap V = \emptyset$. Alors $V \subset (E \setminus F)$, or $\mathcal{V}(x)$ est un filtre, donc $(E \setminus F) \in \mathcal{V}(x)$, donc $x \in \overbrace{E \setminus F}^{\circ} = E \setminus \overline{F}$, ce qui est faux car x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$ et $F \in \mathcal{F}$, donc $x \in \overline{F}$. On a prouvé la question.

19°) (sur 1 point) Le sens direct a été prouvé en question 17.
Supposons que x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$. D'après la question 18, il existe un filtre $\mathcal{F}'$ qui contient $\mathcal{F}$ et qui converge vers x. Mais $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, donc $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ converge vers x.

20°) (sur 3 points)
$\diamond$ Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A \notin \mathcal{F}$ et $(E \setminus A) \notin \mathcal{F}$.
Pour tout $F \in \mathcal{F}$, $F \cap A \neq \emptyset$ (sinon, $F \subset (E \setminus A)$ donc $(E \setminus A) \in \mathcal{F}$). $\mathcal{F}$ étant stable par intersection finie, on en déduit que toute intersection finie non vide d'éléments de $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est non vide. Alors, d'après la question 14, il existe un filtre $\mathcal{F}'$ qui contient $\mathcal{F} \cup \{A\}$, donc qui contient strictement $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre. Par contraposition, on a montré que si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \in \mathcal{F}$ ou $(E \setminus A) \in \mathcal{F}$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre. Il existe un filtre $\mathcal{F}'$ contenant strictement $\mathcal{F}$. Il existe donc $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$.
Si $(E \setminus A) \in \mathcal{F}$, alors $(E \setminus A)$ et A sont deux éléments de $\mathcal{F}'$, donc $\emptyset = (E \setminus A) \cap A \in \mathcal{F}'$, ce qui est faux. Ainsi, $A \notin \mathcal{F}$ et $(E \setminus A) \notin \mathcal{F}$.

Partie VI : Compacité (sur 12 points)

21°) (sur 7 points)
$\diamond$ 1) $\Longrightarrow$ 2) : On suppose que E est compact.
Soit $\mathcal{F}$ un filtre. Il s'agit de montrer que $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$ est non vide. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A} = \emptyset$. La famille $(\overline{A})_{A \in \mathcal{F}}$ est une famille de fermés de E et E est compact, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ tels que $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \overline{A_i} = \emptyset$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $A_i \subset \overline{A_i}$, donc $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i = \emptyset$. Or $\mathcal{F}$ est un filtre, donc $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{F}$,

donc $\emptyset \in \mathcal{F}$, ce qui est faux. Ainsi, il existe $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$ et x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

$\diamond$ 2) $\Longrightarrow$ 3) : On suppose que tout filtre de $\mathcal{F}$ possède un point d'adhérence.
Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre de E. Alors $\mathcal{F}$ possède au moins un point d'adhérence noté x. D'après la question 19, $\mathcal{F}$ converge vers x.

$\diamond$ 3) $\Longrightarrow$ 1) : On suppose que tout ultrafiltre de E converge.
Considérons un ensemble I non vide et une famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E telle que, pour toute partie finie non vide J de I, $\bigcap_{i \in J} A_j \neq \emptyset$.
D'après la question 14, il existe alors un filtre $\mathcal{F}$ qui contient $\{F_i \ / \ i \in I\}$.
Notons $\mathbb{F}$ l'ensemble des filtres contenant $\mathcal{F}$. Alors $\mathbb{F}$ est ordonné par l'inclusion.
Soit $\mathbb{F}'$ une chaîne de $\mathbb{F}$:
Si $\mathbb{F}' = \emptyset$, elle est majorée par $\mathcal{F}$. Supposons maintenant que $\mathbb{F}' \neq \emptyset$.
$\mathbb{F}'$ est totalement ordonné pour l'inclusion, donc pour tout $\mathcal{F}', \mathcal{F}'' \in \mathbb{F}'$, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$ ou $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$. Alors d'après la question 13, $\bigcup_{\mathcal{F}' \in \mathbb{F}'} \mathcal{F}'$ est un filtre sur E. Il contient $\mathcal{F}$ car $\mathbb{F}'$ est non vide, donc c'est un élément de $\mathbb{F}$ qui majore $\mathbb{F}'$.
On a montré que toute chaîne de $\mathbb{F}$ est majorée, donc d'après le lemme de Zorn, $\mathbb{F}$ possède un élément maximal. C'est un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$, que l'on notera $\mathcal{U}$. D'après notre hypothèse, $\mathcal{U}$ converge vers un élément x de E. Ainsi, $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}$.

Soit $i \in I$. Supposons que $x \notin F_i$. F_i est fermé, donc $F_i = \overline{F_i}$. Ainsi, $x \in E \setminus \overline{F_i} = \overbrace{E \setminus F_i}^{\circ}$.

Alors $(E \setminus F_i) \in \mathcal{V}(x)$, donc $(E \setminus F_i) \in \mathcal{U}$. D'autre part, $\mathcal{U}$ contient $\mathcal{F}$ qui contient $\{F_j \ / \ j \in I\}$, donc $F_i \in \mathcal{U}$. Mais $\mathcal{U}$ est un filtre, donc $\emptyset = F_i \cap (E \setminus F_i) \in \mathcal{U}$, ce qui est impossible.
On a donc montré que, pour tout $i \in I$, $x \in F_i$, donc $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.
Par contraposition, on a montré que E est compact.

22°) (sur 5 points) D'après la question 10, E est séparé. Il reste à montrer que E satisfait la propriété 3) de la question précédente. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de E.
Soit $i \in I$. Lorsque $F \subset E_i$, posons $q_i(F) = \{x \in E \ / \ p_i(x) \in F\}$.
Posons alors $\mathcal{U}_i = \{F \in \mathcal{P}(E_i) \ / \ q_i(F) \in \mathcal{U}\}$.
$q_i(E_i) = E \in \mathcal{U}$, donc $E_i \in \mathcal{U}_i$.
$q_i(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{U}$, donc $\emptyset \notin \mathcal{U}_i$.
Soit $F \in \mathcal{U}_i$ et $G \in \mathcal{P}(E_i)$ telle que $F \subset G$. Alors $q_i(F) \subset q_i(G)$, donc $q_i(G) \in \mathcal{U}$ puis $G \in \mathcal{U}_i$.
Soit $F, G \in \mathcal{U}_i$. Alors $q_i(F \cap G) = q_i(F) \cap q_i(G) \in \mathcal{U}$, donc $F \cap G \in \mathcal{U}_i$.
Ceci démontre que $\mathcal{U}_i$ est un filtre de E_i.
Soit $A \in E_i$. $\mathcal{U}$ étant un ultrafiltre, d'après la question 20, $q_i(A) \in \mathcal{U}$ ou $(E \setminus q_i(A)) \in \mathcal{U}$ or $E \setminus q_i(A) = q_i(E_i \setminus A)$, donc $A \in \mathcal{U}_i$ ou $(E_i \setminus A) \in \mathcal{U}_i$. Alors, d'après la question 20, $\mathcal{U}_i$ est un ultrafiltre de E_i.

E_i étant compact, d'après la question précédente, il existe $x_i \in E_i$ tel que $\mathcal{U}_i$ converge vers x_i. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc en utilisant l'axiome du choix (mais on a déjà utilisé le lemme de Zorn qui est équivalent à l'axiome du choix), il existe
$x = (x_i)_{i \in I} \in E$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathcal{U}$ converge vers x.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $U' \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U' \subset V$. U' est une réunion d'ouverts élémentaires, donc il existe un ouvert élémentaire U de E tel que $x \in U \subset V$.
Il existe une partie finie J de I et pour tout $j \in J$, il existe $A_j \in \mathcal{T}_j$
tel que $U = \{x \in E \ / \ \forall j \in J, \ \ p_j(x) \in A_j\} = \bigcap_{j \in J} q_j(A_j)$. On peut imposer que J soit non vide afin que cette intersection soit bien définie. En fait, pour tout $i_0 \in I \setminus J$, on peut ajouter i_0 à J en imposant $A_{i_0} = E_{i_0}$.
Soit $j \in J$. $x \in U$, donc $x_j = p_j(x) \in A_j$ et A_j est un ouvert de $\mathcal{T}_j$, donc $A_j \in \mathcal{V}(x_j)$, mais $\mathcal{U}_j$ converge vers x_j, donc $A_j \in \mathcal{U}_j$. Par définition de $\mathcal{U}_j$, ceci signifie que
$q_j(A_j) \in \mathcal{U}$, pour tout $j \in J$. Mais $\mathcal{U}$ est un filtre, donc $U = \bigcap_{j \in J} q_j(A_j) \in \mathcal{U}$. Or $U \subset V$, donc $V \in \mathcal{U}$. On a donc montré que $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}$, donc que $\mathcal{U}$ converge vers x, ce qui conclut.