Feuille d'exercices 6: Les réels.

Exercice 6.1 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$.

Exercice 6.2 : (niveau 1)
Montrer que $\dfrac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 5 + \ln 7}$ est irrationnel.

Exercice 6.3 : (niveau 1)

1°) Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

2°) Démontrer que la racine carrée d'un irrationnel strictement positif est un irrationnel.

3°) Soient r, s deux rationnels positifs tels que $\sqrt{r}$ et $\sqrt{s}$ sont irrationnels. Démontrer que $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ est irrationnel.

Exercice 6.4 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f|_{\mathbb{Q}}$ est croissante.
Montrer que f est croissante.

Exercice 6.5 : (niveau 1)
On appelle nombre dyadique tout nombre rationnel de la forme $\dfrac{m}{2^k}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.6 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor nx \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$.

Exercice 6.7 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.

Exercice 6.8 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$. F_n peut-il être un nombre décimal ?

Exercice 6.9 : (niveau 2)
Montrer que $\{\sqrt{m} - \sqrt{n} / (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.10 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

2°) Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \ / \ x^2 - 2y^2 = 1\}$ est infini.

Exercice 6.11 : (niveau 2)
Calculer la borne supérieure de $E = \{\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor \ / \ k \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 6.12 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(I_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille finie de n intervalles telle que $\displaystyle\bigcup_{1 \leq j \leq n} I_j$ est un intervalle. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}_n$ tel que $\displaystyle\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq \ell}} I_j$ est un intervalle.

Cette propriété est-elle encore vraie avec une famille infinie d'intervalles ?

Exercice 6.13 : (niveau 3)
Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $B = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6.14 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor\sqrt{x^2+1}\rfloor = 2$.

Exercice 6.15 : (niveau 1)
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2,\ (1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

Exercice 6.16 : (niveau 1)
Démontrer que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme $a+b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Exercice 6.17 : (niveau 1)
Montrer que $\{q^2/q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.18 : (niveau 1)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose T-périodique, avec $T > 0$.
On suppose également qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Montrer que f est constante.

Exercice 6.19 : (niveau 2)
Montrer que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$.

Exercice 6.20 : (niveau 2)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer si elle existe la limite de la suite $(E(a^n)^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$, où E désigne la partie entière.

Exercice 6.21 : (niveau 2)
Démontrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b est un rationnel.

Exercice 6.22 : (niveau 2)

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(I_k)_{0 \le k \le n}$ une famille d'intervalles non vides telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $h < k$ et $I_k \cap I_h \neq \emptyset$.
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{0 \le k \le n} I_k$ est un intervalle.

2°) Soit $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille d'intervalles non vides telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $h < k$ et $I_k \cap I_h \neq \emptyset$.
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ est un intervalle.

3°) La propriété précédente est-elle encore vraie si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?

Exercice 6.23 : (niveau 2)
On fixe k dans $\mathbb{N}^*$. Lorsque $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on note u_n le chiffre des unités de $\binom{n}{k}$ en base 10. Montrer que le réel $x = 0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots$ est un rationnel (formellement, $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{k+n-1}}{10^n}$).

Exercice 6.24 : (niveau 2)
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 6.25 : (niveau 3)
Montrer que $\{\cos(\ln(n)) \ / \ n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq 2\}$ est dense dans $[-1, 1]$.