

DM 11 :

Partitions de chaînes et d'antichaînes

Ce devoir est à préparer à partir du dimanche 27 octobre. Il est à rendre avant le lundi 4 novembre, 23h45.

Notations :

- Lorsque $n \in \mathbb{N}$, on note \mathbb{N}_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et n .
En particulier, $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.
- Pour tout ensemble E , on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .
- Pour tout ensemble fini E , on notera $|E|$ son cardinal.

Rappels :

- Deux ensembles finis E et F ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection de E dans F .
- Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| = |F|$ et $E \subset F$, alors $E = F$.
- Si E et F sont deux ensembles finis de même cardinal, une application f de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, ou bien si et seulement si elle est surjective.

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble fini
et \leq désigne une relation d'ordre quelconque sur E .

Si F est une partie de E , la restriction de \leq sur F est encore une relation d'ordre, que l'on continue à noter \leq (on ne demande pas de le démontrer).

Lorsque $C \subset E$, on dit que C est une chaîne de E si et seulement si \leq est un ordre total sur C .

Lorsque $A \subset E$, on dit que A est une antichaîne de E si et seulement si pour tout $x, y \in A$ avec $x \neq y$, x et y ne sont pas comparables pour \leq .

Si $P = (P_1, \dots, P_n)$ est un n -uplet de parties de E (où $n \in \mathbb{N}$), on dit que P est une partition de E si et seulement si

- Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $P_i \neq \emptyset$;
- Pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$;
- $\bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i = E$.

Lorsque $P = (P_1, \dots, P_n)$ est un n -uplet de parties de E , on dit que c'est une partition de chaînes si et seulement si c'est une partition telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, P_i est une chaîne.

De même, lorsque $P = (P_1, \dots, P_n)$ est un n -uplet de parties de E , on dit que c'est une partition d'antichaînes si et seulement si c'est une partition telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, P_i est une antichaîne.

Partie I : Préliminaires

1°) Si E est non vide, montrer qu'il possède au moins un élément minimal.

2°) On suppose que \leq est un ordre total sur E et que E est non vide. Montrer que E admet un minimum.

3°) Déterminer les parties A de E telles que A est à la fois une chaîne et une antichaîne. En déduire que l'intersection d'une chaîne de E avec une antichaîne de E est ou bien vide, ou bien un singleton.

4°) Montrer que si C est une chaîne de E , en notant $n = |C|$, il existe une unique bijection strictement croissante de \mathbb{N}_n dans C .

Ainsi, toute chaîne de E est de la forme

$$C = \{f(1), \dots, f(n)\}, \text{ avec } f(1) < f(2) < \dots < f(n).$$

Dans ce cas, on dit que C est une chaîne de longueur n et d'origine $f(1)$.

5°) Soit C une chaîne de E et $P = (P_1, \dots, P_n)$ une partition d'antichaînes de E .

Montrer que, pour tout $c \in C$, il existe un unique $i_c \in \mathbb{N}_n$ tel que $c \in P_{i_c}$.

Montrer que l'application $c \mapsto i_c$ est une injection de C dans \mathbb{N}_n .

En déduire que $|C| \leq n$.

6°) Soit A une antichaîne de E et $P = (P_1, \dots, P_n)$ une partition de chaînes de E .

Montrer que $|A| \leq n$.

Pour toute la suite du problème, on note

- \mathcal{C} l'ensemble des cardinaux des chaînes de E ;
- \mathcal{A} l'ensemble des cardinaux des antichaînes de E ;
- \mathcal{P}_C l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe une partition (P_1, \dots, P_n) de chaînes de E ;
- \mathcal{P}_A l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe une partition (P_1, \dots, P_n) d'antichaînes de E .

7°) À l'aide des questions précédentes, démontrer une inégalité reliant $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$, ainsi qu'une inégalité reliant $\max(\mathcal{A})$ et $\min(\mathcal{P}_C)$.

Partie II : Deux exemples

8°) Pour cette question, on suppose que $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}_3)$, et que \leq est la relation d'inclusion entre parties de E .

a) Dessinez, sans justification, un graphe dont les sommets sont les éléments de E et tel qu'une arête va du sommet s vers le sommet s' si et seulement si $s < s'$ et si, pour tout $s'' \in E$, $\neg(s < s'' < s')$.

b) Calculer $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$.

c) Calculer $\max(\mathcal{A})$ et $\min(\mathcal{P}_C)$.

9°) Pour cette question, on suppose que $E = \mathbb{N}_{10}$, et que \leq est la relation de divisibilité.

a) Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

b) Dessinez, sans justification, un graphe dont les sommets sont les éléments de E et tel qu'une arête va du sommet s vers le sommet s' si et seulement si $s < s'$ et si, pour tout $s'' \in E$, $\neg(s < s'' < s')$.

c) Calculer $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$.

d) Calculer $\max(\mathcal{A})$ et $\min(\mathcal{P}_C)$.

Partie III : Partitions de chaînes

Pour tout $x \in E$, on note $f(x)$ le maximum des longueurs des chaînes d'origine x . Cela signifie, en notant \mathcal{D} l'ensemble des chaînes de E que

$$f(x) = \max(\{|C| / C \in \mathcal{D} \text{ et } x = \min(C)\}).$$

On note également $\ell = \max(\mathcal{C})$.

Ainsi, il existe $x_1, \dots, x_\ell \in E$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_\ell$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, on pose $A_i = \{x \in E / f(x) = i\}$.

10°) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, $f(x_i) = \ell - i + 1$.

11°) Montrer que (A_1, \dots, A_ℓ) est une partition de E .

12°) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, A_i est une antichaîne.

En déduire que $\max(\mathcal{C}) = \min(\mathcal{P}_A)$.

13°) Donner une autre démonstration de ce dernier résultat en raisonnant par récurrence sur le cardinal de E et en utilisant l'ensemble des éléments maximaux de E .

Partie IV : Cas particulier de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$

Dans cette partie seulement, on suppose que $E = \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, où $n \in \mathbb{N}$, et que \leq est la relation d'inclusion.

On rappelle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, le nombre d'éléments de E de cardinal k est égal à $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, c'est-à-dire que

$$|\{F \subset \mathbb{N}_n / |F| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

14°) Déterminer une chaîne de cardinal $n + 1$ et une antichaîne de cardinal $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

15°) Sans utiliser la partie III, calculer $\max(\mathcal{C})$ et $\min(\mathcal{P}_A)$.

On appelle "chaîne symétrique" de E , toute chaîne de la forme $C = \{E_k, E_{k+1}, \dots, E_{n-k}\}$, où k est un entier naturel tel que $k \leq n - k$, et où E_k, \dots, E_{n-k} sont des éléments de E tels que $E_k \subset E_{k+1} \subset \dots \subset E_{n-k}$ et, pour tout $i \in \{k, k + 1, \dots, n - k\}$, $|E_i| = i$.

16°) Lorsque $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$, donner une partition de E constituée de chaînes symétriques.

17°) On suppose que $n \geq 1$ et que C est une chaîne symétrique de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n-1})$. Ainsi, $C = \{E_k, E_{k+1}, \dots, E_{n-1-k}\}$, où k est un entier naturel tel que $k \leq n - 1 - k$, et où E_k, \dots, E_{n-1-k} sont des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n-1})$ tels que

$E_k \subset E_{k+1} \subset \dots \subset E_{n-1-k}$ et, pour tout $i \in \{k, k + 1, \dots, n - 1 - k\}$, $|E_i| = i$.

Montrer que $\{E_k, E_{k+1}, \dots, E_{n-1-k}, E_{n-1-k} \cup \{n\}\}$ est une chaîne symétrique de E et que $\{E_k \cup \{n\}, E_{k+1} \cup \{n\}, \dots, E_{n-2-k} \cup \{n\}\}$ est ou bien l'ensemble vide, ou bien une chaîne symétrique de E ,

18°) En déduire qu'il existe une partition de E constituée de chaînes symétriques.

19°) Montrer que, pour toute partition (P_1, \dots, P_N) de E telle que P_1, \dots, P_N sont des chaînes symétriques, on a $N = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

En déduire que $\max(\mathcal{A}) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (théorème de Sperner).

Sans calcul, en déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Partie V : Théorème de Dilworth

E désigne à nouveau un ensemble fini quelconque muni d'une relation d'ordre quelconque que l'on note \leq . L'objectif de cette partie est de montrer que $\max(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{P}_C)$ (théorème de Dilworth).

On suppose que le théorème de Dilworth est démontré lorsqu'on remplace E par n'importe quel ensemble de cardinal strictement inférieur à $|E|$.

On choisit une chaîne C de E telle que $|C| = \max(\mathcal{C})$.

On pose $\alpha = \max(\mathcal{A})$.

20°) On suppose d'abord que, pour toute antichaîne A de cardinal α de E , $C \cap A \neq \emptyset$, c'est-à-dire que C rencontre toutes les antichaînes de E de cardinal maximal. En utilisant $E \setminus C$, montrer que $\max(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{P}_C)$.

On suppose maintenant qu'il existe une antichaîne A de cardinal α telle que $A \cap C = \emptyset$. On pose $A_+ = \{x \in E / \exists a \in A, a \leq x\}$ et $A_- = \{x \in E / \exists a \in A, x \leq a\}$.

21°) Montrer que $A_+ \cup A_- = E$ et que $A_+ \cap A_- = A$.

22°) En utilisant $\min(C)$ et $\max(C)$, montrer que $A_+ \neq E$ et que $A_- \neq E$.

23°) Conclure.