Résumé de cours :
Semaine 7, du 14 au 18 octobre.

1 $\mathbb{R}$

1.1 Une caractérisation de $\mathbb{R}$.

Caractérisation de $\mathbb{R}$: (admise)
Il existe au moins un corps K totalement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.
De plus si K' est un autre corps totalement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure, il existe une bijection f de K dans K' telle que f est un morphisme de corps ordonnés, c'est-à-dire :
- $\forall x, y \in K,\ \ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$,
- $\forall x, y \in K,\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $\forall x, y \in K,\ \ f(xy) = f(x)f(y)$,
- $f(1_K) = 1_{K'}$.

Cela signifie que, quitte à renommer x en $f(x)$, K et K' sont égaux, tant que dans K et K' on se contente d'utiliser leurs structures de corps totalement ordonnés.
Ainsi, à un morphisme bijectif près, il existe un unique corps totalement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Il est noté $\mathbb{R}$ et ses éléments sont appelés les réels.
Il existe un morphisme injectif de corps ordonné de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qui permet d'identifier $\mathbb{Q}$ avec une partie de $\mathbb{R}$.

1.2 La droite réelle achevée

Définition. On appelle droite réelle achevée l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} \overset{\Delta}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, sur lequel l'ordre dans $\mathbb{R}$ est prolongé par les conditions : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ -\infty < x < +\infty$.

Propriété. $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné dans lequel toute partie possède une borne inférieure et une borne supérieure. En particulier, toute partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. De plus, $\sup(A) = +\infty \Longleftrightarrow A$ non majorée et $\sup(A) = -\infty \Longleftrightarrow A = \emptyset$.

1.3 Les intervalles

Définition.
- Pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, l'intervalle $]a, b[$ est défini par $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[a, b]$ est défini par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, les intervalles $[a, b[$ et $]b, a]$ sont définis par :
  $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$ et $]b, a] = \{x \in \mathbb{R}/b < x \leq a\}$.
- En particulier, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et $\emptyset =]0, -1[$ sont des intervalles.

Définition.
- Un intervalle est ouvert si et seulement si il est de la première forme $]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
- On dit qu'un intervalle est fermé si et seulement si son complémentaire est une réunion d'un ou deux d'intervalles ouverts.
- Ainsi, $[a, b]$ est fermé lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, mais $[a, +\infty[$ est aussi fermé (avec $a \in \mathbb{R}$).
- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés.
- $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé. On dit qu'il est semi-ouvert ou semi-fermé.
- Les intervalles fermés bornés sont de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On les appelle aussi des segments.

Définition. Une partie A de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a, b \in A$ avec $a < b$, $[a, b] \subset A$.

Théorème. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement ses intervalles.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Une intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour une famille d'intervalles deux à deux non disjoints, l'union de ces intervalles est encore un intervalle.
Il faut savoir le démontrer.

1.4 la valeur absolue

Propriété. Le signe au sens large du produit de deux réels est égal au produit des signes de ces réels.

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $|x| = \max\{-x, x\}$.
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |xy| = |x||y|$.

Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$, avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

Corollaire de l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
A savoir démontrer.

Formule : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\min(a, b) = \dfrac{(a + b) - |a - b|}{2}$ et $\max(a, b) = \dfrac{(a + b) + |a - b|}{2}$.
Il faut savoir le démontrer.

Distance entre réels : Lorsque $x, y \in \mathbb{R}$, la quantité $d(x, y) = |x - y|$ est appelée la distance entre les deux réels x et y. Elle vérifie l'inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.5 Propriétés usuelles des réels

Propriété. $\mathbb{R}$ est archimédien : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N},\ na > b$.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leq a \leq y$.

Propriété. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Elle est notée $\lfloor x \rfloor$. C'est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

On appelle partie entière supérieure de x le plus petit entier supérieur ou égal à x. Elle est notée $\lceil x \rceil$. C'est l'unique entier n tel que $n-1 < x \leq n$.

Une inégalité très utile : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
A savoir établir.

2 Développement décimal

2.1 Développement décimal d'un entier naturel

Propriété. Si (x_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$.

Définition. Les chiffres en base 10 sont $0, 1, \ldots, 9$.

Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle de chiffres $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0, \ldots, 9\}^{(\mathbb{N})}$ telle que $n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k 10^k$.

Remarque. On peut généraliser et développer en base a où a est un entier supérieur ou égal à 2.

CNS de divisibilité : Soit $n \in \mathbb{N}$, dont le développement décimal est noté $n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k 10^k$. On note $s = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ la somme des chiffres de n.

— n est divisible par 2 si et seulement si $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
— n est divisible par 5 si et seulement si $a_0 \in \{0, 5\}$.
— n est divisible par 10 si et seulement si $a_0 = 0$.
— n est divisible par 3 si et seulement si $s \equiv 0\ [3]$.
— n est divisible par 9 si et seulement si $s \equiv 0\ [9]$.
— n est divisible par 11 si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k a_k \equiv 0\ [11]$.

Il faut savoir le démontrer.

2.2 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition. $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{n}{10^k} / n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}$. C'est une partie stricte de $\mathbb{Q}$ dont les éléments sont appelés les nombres décimaux.

Propriété. Soit $x \in \mathbb{Q}$. x est un nombre décimal si et seulement si son écriture irréductible est de la forme $x = \dfrac{p}{2^h 5^k}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $h, k \in \mathbb{N}$.

Remarque. $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau.

Propriété. $d \in \mathbb{D}$ si et seulement si il existe une famille presque nulle de chiffres indexée par $\mathbb{Z}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \{0, \ldots, 9\}^{(\mathbb{Z})}$ telle que $d = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k 10^k$.

2.3 Approximation d'un réel

Définition. Soit $x, \alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

— On dit que α est une valeur approchée de x à ε près si et seulement si $d(x, \alpha) \leq \varepsilon$. $\boxed{\text{On note alors } x = \alpha \pm \varepsilon.}$
— On dit que α est une valeur approchée de x à ε près par défaut si et seulement si $\alpha \leq x \leq \alpha + \varepsilon$,
— On dit que α est une valeur approchée de x à ε près par excès si et seulement si $\alpha - \varepsilon \leq x \leq \alpha$.

Propriété. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Posons $\alpha = \dfrac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p}$. $\alpha \in \mathbb{D}$.
Alors α est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-p} près,
et $\alpha + 10^{-p}$ est une valeur approchée de x par excès à 10^{-p} près.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.4 Développement d'un réel en base quelconque

Notation. On fixe un entier naturel a supérieur ou égal à 2.

Propriété. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq a-1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sum_{k=1}^{n} v_k a^{-k}$. La suite (x_n) est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite x que l'on notera $x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n a^{-n}$. Dans ces conditions, on dit que $(v_n)_{n\geq 1}$ est un développement de x en base a et on note $x = 0, \overline{v_1 v_2 \cdots v_n v_{n+1} \cdots}$.
De plus, $x \in [0,1]$ et $[x = 1 \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = a-1)]$.
Il faut savoir le démontrer.

Notation. Posons $\mathcal{V} = \{(v_n)_{n\geq 1} / \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ v_n \in \mathbb{N} \cap [0, a[\text{ et } \forall N \in \mathbb{N}^* \ \exists n \geq N \ \ v_n \neq a-1\}$. Ainsi, les éléments de $\mathcal{V}$ sont les suites de chiffres qui ne sont pas tous égaux à $a-1$ à partir d'un certain rang.

Théorème. Tout réel de $[0,1[$ admet un unique développement en base a dans $\mathcal{V}$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On peut écrire $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, où $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ et où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ est la partie fractionnaire de x. On obtient le développement en base a du réel x en concaténant le développement en base a de l'entier$\lfloor x \rfloor$ avec celui du réel $\{x\} \in [0,1[$.

On terminera ce paragraphe à la rentrée avec :
Théorème hors programme : caractérisation d'un rationnel. Soit $x \in [0,1[$.
Notons $x = 0, \overline{v_1 \cdots v_n \cdots}$ le développement en base a de x.
x est un rationnel si et seulement si son développement en base a est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N,\ \ v_n = v_{n+p}$.
Il faut savoir le démontrer.

3 Applications

3.1 Généralités

Définition. Une fonction f de E dans F est un triplet $f = (E, F, \Gamma)$, où E et F sont des ensembles et où Γ est une relation binaire sur $E \times F$ telle que
$\forall x \in E,\ \ \forall y, z \in F,\ \ (x\ \Gamma\ y) \wedge (x\ \Gamma\ z) \Longrightarrow (y = z)$, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ en relation avec x. On note alors "$y = f(x)$ " au lieu de $x\ \Gamma\ y$ ou bien $(x, y) \in \Gamma$.
- Le domaine de définition de f est $\{x \in E / \exists y \in F,\ \ x\ \Gamma\ y\}$. On le notera $\mathcal{D}_f$.
- Une application de E dans F est une fonction telle que $\mathcal{D}_f = E$.
- E s'appelle l'ensemble de départ de f et F l'ensemble d'arrivée.
- Γ s'appelle le graphe de f. $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F / x\ \Gamma\ y\} = \{(x, f(x)) / x \in \mathcal{D}_f\}$.
- Lorsque $y = f(x)$, où $x \in E$ et $y \in F$,
  - on dit que y est l'image de x par f et

— que x est un antécédent de y par f.

Propriété. Soit f une fonction de E vers F et soit g une fonction de E' vers F'. Alors $f = g$ si et seulement si $E = E'$, $F = F'$, $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = g(x)$.

Définition. Soit E et I deux ensembles. La famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexée par I est l'unique application de I dans E dont le graphe est $\{(i, e_i)/i \in I\}$. Il s'agit d'une autre façon de noter une application, parfois mieux adaptée.

Définition. Une *suite* est une famille d'éléments indexée par $\mathbb{N}$, ou éventuellement par $\{n \in \mathbb{N}/n \geq n_0\}$ (où $n_0 \in \mathbb{N}$).

Définition. Si E et F sont deux ensembles, le triplet $(E, F, \emptyset)$ est une fonction de E dans F, que l'on appelle la fonction vide. Elle est définie sur $\emptyset$.
Le triplet $(\emptyset, F, \emptyset)$ est une application à valeurs dans F, appelée l'application vide.
La famille (d'éléments de E) $(e_i)_{i\in\emptyset}$ désigne l'application vide $(\emptyset, E, \emptyset)$, que l'on appelle aussi la famille vide d'éléments de E.

Notation. L'application identité sur E est définie par : $\forall x \in E,\ \ Id_E(x) = x$.

Définition. Soit E un ensemble et A une partie de E. L'indicatrice de A dans E est l'unique application, notée $\mathbf{1}_A$, de E dans $\{0, 1\}$ telle que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \in E \setminus A$.

Propriété. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. En définissant naturellement la somme, la différence et le produit de deux applications de E dans $\mathbb{R}$, on vérifie que : $\mathbf{1}_{E\setminus A} = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f une application de E vers F. On suppose que F est muni d'une relation d'ordre $\preceq$. Soit A une partie de E. Les majorant, borne supérieure, minimum etc. de f sur A sont par définition les majorant, borne supérieure, minimum etc. de $f(A)$.

Définition. Soit I un ensemble quelconque et soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble F. On suppose que F est muni d'une relation d'ordre $\preceq$. Les majorant, borne supérieure, minimum etc. de $(f_i)_{i\in I}$ sont par définition les majorant, borne supérieure, minimum etc. de $\{f_i/i \in I\}$.

Notation. On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou bien F^E l'ensemble des applications de E dans F.
F^I est donc aussi l'ensemble des familles indexées par I d'éléments de l'ensemble F.

Définition. Soient E et F deux ensembles, E' une partie de E et F' une partie de F.
- Soit f une application de E dans F. La restriction de f à E' est l'unique application de E' dans F telle que $\forall x \in E',\ \ f|_{E'}(x) = f(x)$.
- Soit f une application de E' dans F. On appelle prolongement de f sur E toute application g de E dans F telle que $g|_{E'} = f$.
- Si pour tout $x \in E$, $f(x) \in F'$, la corestriction de f à F' est l'unique application de E dans F' telle que : pour tout $x \in E$, $f|^{F'}(x) = f(x)$.
- Si, pour tout $x \in E'$, $f(x) \in F'$, $f|_{E'}^{F'}$ désigne l'application de E' dans F' telle que, pour tout $x \in E'$, $(f|_{E'}^{F'})(x) = f(x)$.

Définition. Soit f une application d'un ensemble E *dans lui-même*. Une partie A de E est stable par f si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :
- $\forall x \in A,\ \ f(x) \in A$,
- $f(A) \subset A$,
- $f|_A^A$ est définie.

Définition. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G. La composée de g et de f est l'unique application $g \circ f$ de E dans G définie par : $\forall x \in E,\ \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Associativité de la composition : Soit f une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H. Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. On peut donc noter $h \circ g \circ f$ cette fonction.

3.2 Applications croissantes et décroissantes

Définition. Soit f une application d'un ensemble ordonné $(E, \leq_E)$ dans un ensemble ordonné $(F, \leq_F)$.

— f est croissante si et seulement si $[\forall x, y \in E,\ \ x \leq_E y \Longrightarrow f(x) \leq_F f(y)]$.

— f est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in E,\ \ x <_E y \Longrightarrow f(x) <_F f(y)$.

— f est décroissante si et seulement si elle est croissante de $(E, \leq_E)$ dans $(F, \geq_F)$.

— f est strictement décroissante si et seulement si $\forall x, y \in E,\ \ x <_E y \Longrightarrow f(x) >_F f(y)$.

— f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.

— f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Propriété.

— La composée de deux applications croissantes est croissante.

— La composée de deux applications décroissantes est croissante.

— La composée d'une application croissante et d'une application décroissante est décroissante.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ est croissante.

— Si f et g sont décroissantes, alors $f + g$ est décroissante.

— Si f est croissante, $-f$ est décroissante.

— Si f et g sont à valeurs positives et croissantes (resp : décroissantes), alors fg est croissante (resp : décroissante).

— Si f et g sont à valeurs strictement positives et sont strictement croissantes (resp : strictement décroissantes), alors fg est strictement croissante (resp : strictement décroissante).

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f et g deux applications d'un ensemble E dans un ensemble ordonné $(F, \leq)$. On écrit $f \leq g$ si et seulement si , pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$.
On définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(E, F)$.

3.3 Images directes et réciproques

Définition. Soit f une application de E dans F.

— Si A est une partie de E, l'image directe de A par f est $f(A) \triangleq \{f(x)/x \in A\}$.
Ainsi, $\forall y \in F,\ \ y \in f(A) \Longleftrightarrow [\exists x \in A,\ \ y = f(x)]$.
$f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A.

— Si B est une partie de F, l'image réciproque de B par f est
$f^{-1}(B) \triangleq \{x \in E/f(x) \in B\}$. Ainsi, $\forall x \in E,\ \ x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$.
$f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

Propriétés des images directes : Soit f une application de E dans F, $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, A et A' deux parties de E.

— $A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$.

— $f\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

— $f\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, mais l'inclusion réciproque est fausse en général.

— $f(E \setminus A) \supset f(E) \setminus f(A)$, mais l'inclusion réciproque est fausse en général.

Il faut savoir le démontrer.

Propriétés des images réciproques : Soit f une application de E dans F, $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F, B et B' deux parties de F.

- $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
- $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
- $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Avec les notations de la propriété précédente,
$A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$, mais les inclusions réciproques peuvent être fausses.
Il faut savoir le démontrer.

3.4 Injectivité et surjectivité

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$. f est injective si et seulement si $\forall x, y \in E,\ [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de E, leurs images sont différentes, ou encore si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent.

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$. f est surjective si et seulement si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $f(E) = F$, ou encore si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent.

Définition. On dit que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

Propriété. Soit f une application de E dans F. Sur E, on définit la relation binaire R par : $xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$. R est une relation d'équivalence. Alors l'application $\begin{array}{rccc}\overline{f}: & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x)\end{array}$ est une bijection.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections est une bijection.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjectif.

Définition et propriété :
⋄ Soit f une bijection de E dans F. Pour tout $y \in F$, notons $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. Alors f^{-1} est une bijection de F dans E, appelée la bijection réciproque de f.
⋄ On vérifie que $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.
⋄ Réciproquement, s'il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$, alors f et g sont des bijections et $g = f^{-1}$.
⋄ $(f^{-1})^{-1} = f$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque. La notation f^{-1}, pour une application f, est utilisée selon deux sens *différents*, qu'il est important de bien distinguer :

- Lorsque f est une application *quelconque* de E dans F, si B est une partie de F, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

— Lorsque f est une *bijection* de E dans F, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f.

En particulier, dès que l'on utilise une expression de la forme $f^{-1}(y)$ où y est un *élément* de l'ensemble d'arrivée de f, on suppose nécessairement que f est une bijection.
Lorsque $y \in F$, il importe de bien distinguer $f^{-1}(y)$ qui représente, pour une bijection f, l'unique antécédent de y, et $f^{-1}(\{y\})$ qui représente, pour une application f quelconque, l'ensemble des antécédents de y. Cet ensemble peut être vide lorsque f n'est pas surjective, il peut contenir plus de deux éléments lorsque f n'est pas injective.

Propriété. Si f est une bijection de E dans F, alors pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$ et, pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Propriété. (HP) Les applications injectives sont simplifiables à gauche et les applications surjectives sont simplifiables à droite.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $E \neq \emptyset$, alors $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.
Il faut savoir le démontrer.