DM 14. Corrigé

Exercice 1 :

1°)
◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
Démontrons $R(n)$ par récurrence.
Lorsque $n = 0$: $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$, ce qui prouve $R(0)$.
Soit $n \geq 0$. Supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, donc $f(-x) = -f(x)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$,
donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
◇ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$. Posons $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
$qf(\alpha x) = f(q\alpha x) = f(px) = pf(x)$, donc $f(\alpha x) = \dfrac{p}{q}x = \alpha f(x)$.
En particulier, avec $x = 1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $f(\alpha) = \alpha$.
◇ Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(x) \neq x$.
Si $f(x) < x$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) < \alpha < x$. Mais f étant croissante, on a $\alpha = f(\alpha) \leq f(x)$, ce qui est en contradiction avec $f(x) < \alpha$.
On raisonne de même si $f(x) > x$, donc $f(x) = x$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \in \mathbb{R}_+^*$, donc on peut poser $g(x) = \ln(f(x))$.
g est croissante en tant que composée de fonctions croissantes, $g(1) = \ln(e) = 1$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $g(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = g(x) + g(y)$.
D'après la première question, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = x$, donc $f(x) = e^x$.

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $e^x \in \mathbb{R}_+^*$, donc on peut poser $f(x) = g(e^x)$.
f est croissante en tant que composée de fonctions croissantes, $f(1) = g(e) = 1$ et, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = g(e^x e^y) = f(x) + f(y)$, donc d'après la première question, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(\ln x) = \ln x$.

Exercice 2 :

1°) **a)** Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq e^t \leq e$, donc par croissante de l'intégrale,
$0 \leq \alpha_n \leq \displaystyle\int_0^1 e(1-t)^n dt = e\Big[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 = \frac{e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
D'après le principe des gendarmes on en déduit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Par intégration par parties, pour $n \geq 1$,
$\alpha_n = \Big[(1-t)^n e^t\Big]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 n(1-t)^{n-1}e^t dt = -1 + n\alpha_{n-1}.$

c) On en déduit que $(n+1)\alpha_n = 1 + \alpha_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $n\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}(n+1)\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui montre que $\alpha_n \sim \dfrac{1}{n}$.

2°) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_n}{n!}$.
Pour $n = 0$, $\alpha_0 = [e^t]_0^1 = e - 1$, d'où $R(0)$.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{\alpha_{n+1}}{n+1}$,
donc $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui prouve $R(n+1)$.
Le principe de récurrence permet de conclure.

b) Ainsi, $u_n = \sin\Big(\pi \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + \pi\alpha_n\Big)$.
Pour $k \leq n-2$, $\dfrac{n!}{k!} = n(n-1)[(n-2)\cdots(k+1)] \in n(n-1)\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N}$, car n ou $n-1$ est pair. Ainsi, $u_n = \sin(\pi + n\pi + \pi\alpha_n) = (-1)^{n+1}\sin(\pi\alpha_n)$.
D'autre part, $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc par composition des limites, $\dfrac{\sin \pi\alpha_n}{\pi\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit que $u_n \sim (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}$.

Problème

Partie I : Généralités.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $t = \frac{\pi}{2} - x$:
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(\frac{\pi}{2} - x)(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx.$

2°) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

3°) Dans $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \cos t \; dt$, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \; dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \; dt \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2})
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

4°)

◇ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$, donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$I_{2n} = I_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$.

◇ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$, donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)^2}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k+1)} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

5°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$, donc par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt = I_n$. Ainsi la suite des intégrales de Wallis est décroissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4, $I_n > 0$ et $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, donc
$\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Partie II : Calcul de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6°) a) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(t) = \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$.
$f'(t) = \frac{\pi}{2}\cos t - 1$ puis $f''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t \leq 0$. Ainsi f' est décroissante entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Or $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$. Ainsi, il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. De plus, $f'(x)$ est positif pour $x \in [0, \alpha]$ et négatif pour $x \in [\alpha, \frac{\pi}{2}]$.
De plus, $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc le tableau de variations de f (à faire) montre que f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $t \leq \dfrac{\pi}{2}\sin t$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale,
$J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t\ dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^{2n} t\ dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t\ dt.$
Ainsi, $0 \leq J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_{2n} - I_{2n+2})$.
c) Ainsi, en divisant par $I_{2n} > 0$, d'après la question 3,
$0 \leq \dfrac{J_n}{I_{2n}} \leq \dfrac{\pi^2}{4}(1 - \dfrac{2n+1}{2n+2}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

7°) a) Dans I_{2n}, on effectue deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= [t \cos^{2n} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n-1} t\ dt \\ &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n-1} t\ dt \\ &= 2n[\frac{t^2}{2} \sin t \cos^{2n-1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left[\cos^{2n} t - (2n-1) \sin^2 t \cos^{2n-2} t\right]\ dt \\ &= -nJ_n + n(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - \cos^2 t) \cos^{2n-2} t\ dt \\ &= -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n \end{aligned}$$

d'où

$$I_{2n} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$$

b) $\dfrac{J_{n-1}}{I_{2n-2}} - \dfrac{J_n}{I_{2n}} = \dfrac{J_{n-1}}{I_{2n} \cdot \frac{2n}{2n-1}} - \dfrac{J_n}{I_{2n}} = \dfrac{1}{2n^2 I_{2n}}(n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n) = \dfrac{1}{2n^2}$.
c) $J_0 = \dfrac{\pi^3}{3.2^3} = \dfrac{\pi^3}{24}$ et $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Par télescopage,
$\dfrac{S_n}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{J_{k-1}}{I_{2k-2}} - \frac{J_k}{I_{2k}}\Big) = \Big(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_{2n}}\Big)$, or $\dfrac{J_n}{I_{2n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{S_n}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{12}$, ce qui démontre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie III : Calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ et de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

8°) a) Pour tout $a \in]-1, +\infty[$, posons $f(a) = a - \ln(1 + a)$.
f est dérivable et $f'(a) = 1 - \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{a}{1+a}$. Ainsi, $f'(a)$ est du signe de a : f est décroissante à gauche de 0 et croissante à droite. Ceci prouve que, pour tout $a \in]-1, +\infty[$, $f(a) \geq f(0) = 0$, donc $\ln(1 + a) \leq a$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in [0, \sqrt{n}]$.

$\diamond$ Lorsque $u \neq \sqrt{n}$, $-\dfrac{u^2}{n} > -1$, donc $\ln\Big(1 - \dfrac{u^2}{n}\Big) \leq -\dfrac{u^2}{n}$, puis $n\ln\Big(1 - \dfrac{u^2}{n}\Big) \leq -u^2$.
L'exponentielle étant croissante, on en déduit que $\Big(1 - \dfrac{u^2}{n}\Big)^n \leq e^{-u^2}$.
Lorsque $u = \sqrt{n}$, on a encore $\Big(1 - \dfrac{u^2}{n}\Big)^n = 0 \leq e^{-u^2}$.

$\diamond$ De plus, $\ln\Big(1 + \dfrac{u^2}{n}\Big) \leq \dfrac{u^2}{n}$, donc $-n\ln\Big(1 + \dfrac{u^2}{n}\Big) \geq -u^2$, puis $e^{-u^2} \leq \Big(1 + \dfrac{u^2}{n}\Big)^{-n}$.

9°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)^n \, du$, posons $u = \sqrt{n}\sin t$, ce qui est possible car l'application $t \longmapsto \sqrt{n}\sin t$ est de classe C^1. Ainsi,
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 - \frac{u^2}{n}\Big)^n \, du = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)^n \sqrt{n}\cos t \; dt = I_{2n+1}$.

10°) Posons $u = \sqrt{n}\tan t$, ce qui est possible car l'application $t \longmapsto \sqrt{n}\tan t$ est de classe C^1. Ainsi,
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1 + \frac{u^2}{n}\Big)^{-n} \, du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 t)^{-n}\sqrt{n}(1 + \tan^2 t) \; dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t \; dt$.

11°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$, donc
$(n+1)I_{n+1}I_n = (n+1)I_{n-1}\dfrac{n}{n+1}I_n = nI_nI_{n-1}$. Ainsi, la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante, égale à son premier terme $I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$.

b) Or $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $nI_nI_{n-1} \sim nI_n^2$. Ceci prouve que $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, or $I_n > 0$, donc $\sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

12°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 8.b et la croissance de l'intégrale,
$\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \Big(1-\frac{u^2}{n}\Big)^n \, du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} \, du \leq \int_0^{\sqrt{n}} \Big(1+\frac{u^2}{n}\Big)^{-n} \, du$. Alors, d'après les questions 9 et 10, $\displaystyle\sqrt{n}I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} \, du \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t \, dt \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t \, dt = \sqrt{n}I_{2n-2}$.
Or $\sqrt{n}I_{2n+1} = \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}\sqrt{2n+1}I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
et $\sqrt{n}I_{2n-2} = \sqrt{\dfrac{n}{2n-2}}\sqrt{2n-2}I_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, donc d'après le principe des gendarmes, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} \, du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

De plus, la fonction $u \longmapsto e^{-u^2}$ est positive, donc l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} \, du$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, il existe $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ telle que $\displaystyle\int_0^x e^{-u^2} \, du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$. Alors, par composition des limites, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} \, du \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$, donc par unicité de la limite, $L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Ceci prouve que $\int_0^x e^{-u^2}\, du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On peut donc écrire que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

13°) a) Soit $\varepsilon, A \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \varepsilon < A$. Avec $x = \frac{1}{2}$, $\int_\varepsilon^A e^{-t} t^{x-1}\, dt = \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$.
Posons $t = u^2$, ce qui est possible, car l'application $u \longmapsto u^2$ est de classe C^1. Ainsi, $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{A}} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u\, du = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{A}} e^{-u^2}\, du = 2(F(\sqrt{A}) - F(\sqrt{\varepsilon}))$, où F est une primitive de l'application continue $u \longmapsto e^{-u^2}$. F est de classe C^1, donc elle est continue en 0. Ainsi, $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2(F(\sqrt{A}) - F(0)) = 2\int_0^{\sqrt{A}} e^{-u^2}\, du$.
Ainsi, d'après la question précédente, $\Gamma(\frac{1}{2})$ est bien définie
et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
$\Gamma(n+\frac{1}{2})$ est défini et $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$.
Montrons $R(n)$ par récurrence.
Pour $n = 0$, $R(0)$ résulte de la question précédente.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$ et démontrons $R(n+1)$.
Soit $\varepsilon, A \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \varepsilon < A$. Par intégration par parties,
$\int_\varepsilon^A e^{-t} t^{(n+1+\frac{1}{2})-1}\, dt = \int_\varepsilon^A e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}}\, dt = \Big[-e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}}\Big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A e^{-t}(n+\frac{1}{2}) t^{n+\frac{1}{2}-1}\, dt$.
Faisons d'abord tendre ε vers 0 : $-e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$,
donc $\int_\varepsilon^A e^{-t} t^{(n+1+\frac{1}{2})-1}\, dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -e^{-A} A^{n+\frac{1}{2}} + \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_\varepsilon^A e^{-t}(n+\frac{1}{2}) t^{n+\frac{1}{2}-1}\, dt\Big]$. Or d'après la propriété des croissances comparées, $e^{-A} A^{n+\frac{1}{2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, on peut faire tendre A vers $+\infty$. Ainsi, $\Gamma(n+\frac{3}{2})$ est bien défini et
$\Gamma(n+\frac{3}{2}) = (n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{2} \times \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!} = \frac{(2n+2)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}(n+1)!}$,
ce qui prouve $R(n+1)$.

Partie IV : Formule de Stirling

14°) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4,
$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} = \Big(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\Big)^2 \frac{2n+1}{2^{4n}}\frac{\pi}{2}$, donc d'après la question 5.b, cette quantité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, ainsi que sa racine carrée. Ainsi, $\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, or $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sim \sqrt{n}$, donc $\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

15°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(n+\frac{1}{2})^2 - x^2 \geq (\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 > 0$, donc l'intégrale de l'énoncé est bien définie. De plus,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - x^2}\,dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - (n+\frac{1}{2})^2 + (n+\frac{1}{2})^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - x^2}\,dx \\
&= -1 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1 - (\frac{x}{n+\frac{1}{2}})^2} \\
&= -1 + \Big[(n+\frac{1}{2})\mathrm{argth}\frac{x}{n+\frac{1}{2}}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= -1 + (n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\Big[\ln\frac{\frac{x}{n+\frac{1}{2}}+1}{\frac{x}{n+\frac{1}{2}}-1}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= -1 + (n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\ln\Big[\frac{\frac{1}{2n+1}+1}{\frac{1}{2n+1}-1} \times \frac{\frac{-1}{2n+1}-1}{\frac{-1}{2n+1}+1}\Big] \\
&= -1 + (n+\frac{1}{2})\ln\Big[\frac{\frac{1}{2n+1}+1}{1-\frac{1}{2n+1}}\Big] \\
&= -1 + (n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln\Big[\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} \times \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\Big] \\
&= \ln\frac{1}{e} + \ln\Big(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\Big) \\
&= -1 + (n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - x^2}dx$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(n+\frac{1}{2})^2 - x^2 \geq (n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = n(n+1)$, donc $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\,dx}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(\frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2^3}\Big)$, donc $0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{12}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\Big)$.

16°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$, donc d'après la question 15.b, $u_n \leq u_1 + \displaystyle\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = u_1 + \frac{1}{12}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \leq u_1 + \frac{1}{12}$. Ainsi, la suite (u_n) est majorée, or elle est croissante, car $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc elle converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$.

17°) On pose $\mu = e^{-\lambda} > 0$; $\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$, donc (1) : $n! \sim \mu e^{-n}\sqrt{n}n^n$.

On en déduit que $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \times \dfrac{\mu e^{-2n}\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{\mu^2 e^{-2n} n^{2n+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\mu}$, donc $\dfrac{\sqrt{2}}{\mu} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, puis $\mu = \sqrt{2\pi}$. Alors la relation (1) devient $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$.