DM 11 : un corrigé

Partie I : Préliminaires

1°) Supposons que E ne possède aucun élément minimal.
E est non vide, donc il existe $e_1 \in E$.
e_1 n'est pas minimal dans E, donc il existe $e_2 \in E$ tel que $e_2 < e_1$.
e_2 n'est pas minimal dans E, donc il existe $e_3 \in E$ tel que $e_3 < e_2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $e_1, \ldots, e_n \in E$ tels que $e_n < e_{n-1} < \cdots < e_1$. Alors e_n n'est pas minimal dans E, donc il existe $e_{n+1} \in E$ tel que $e_{n+1} < e_n$.
Ainsi, on construit par récurrence une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E strictement décroissante.
Soit $h, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $h < k$. Alors $e_h < e_k$, donc $e_h \neq e_k$.
Ainsi, l'ensemble $\{e_k \ / \ k \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie infine de E, ce qui est impossible car E est fini. Ceci démontre que E possède au moins un élément minimal.

2°) D'après la question précédente, E admet au moins un élément minimal, noté m.
Soit $e \in E$. m étant minimal, on a $\neg(e < m)$, or l'ordre est total, donc $m \leq e$. Ainsi, m est le minimum de E.

3°) $\diamond$ Soit A une partie de E.
Supposons que $|A| \geq 2$. Il existe $a, b \in A$ tel que $a \neq b$.
Si a et b sont comparables, alors A n'est pas une antichaîne.
Si a et b ne sont pas comparables, alors A n'est pas une chaîne.
Ainsi, dans tous les cas, A n'est pas à la fois une chaîne et une antichaîne.
Réciproquement, supposons que $|A| \leq 1$. Alors A est un singleton ou bien est égal à l'ensemble vide. A ne contient aucun couple d'éléments distincts, donc c'est une antichaîne et une chaîne.
Conclusion, $\boxed{A \text{ est à la fois une chaîne et une antichaîne si et seulement si } |A| \leq 1}$.
$\diamond$ Soit C une chaîne de E et A une antichaîne de E. Alors $A \cap C$ est une chaîne, en tant que partie de la chaîne C, et c'est aussi une antichaîne, en tant que partie de l'antichaîne A. Ainsi, d'après le point précédent, $|A \cap C| \leq 1$, ce qu'il fallait démontrer.

4°) *Analyse :* Supposons qu'il existe une bijection f strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans C. Soit $k \in \mathbb{N}_n$. Alors $C \setminus \{f(1), \ldots, f(k-1)\} = \{f(k), f(k+1), \ldots, f(n)\}$, donc $C \setminus \{f(1), \ldots, f(k-1)\}$ admet un minimum et $f(k) = \min(C \setminus \{f(1), \ldots, f(k-1)\})$.
Ceci définit par récurrence la suite $(f(k))_{1\leq k\leq n}$, à partir de C, ce qui prouve l'unicité.

Synthèse : Notons $(f(k))_{1\leq k\leq n}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante : $f(k) = \min(C \setminus \{f(1),\ldots,f(k-1)\})$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.
Il s'agit de montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}_n$ dans C.
Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. $f(k+1) \in C \setminus \{f(1),\ldots,f(k)\}$, donc $f(k+1) \neq f(k)$.
De plus, $f(k+1) \in C \setminus \{f(1),\ldots,f(k-1)\}$,
donc $f(k) = \min(C \setminus \{f(1),\ldots,f(k-1)\}) \leq f(k+1)$. Ainsi, $f(k) < f(k+1)$, ce qui prouve que f est strictement croissante.
Soit $h, k \in \mathbb{N}_n$ avec $h < k$. Alors $f(h) < f(k)$, donc $f(h) \neq f(k)$. Ainsi f est une application injective, de C dans $\mathbb{N}_n$ avec $n = |C|$, donc c'est une bijection.

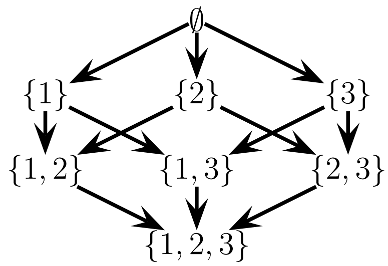
5°) ⋄ Soit $c \in C$. $c \in E = \bigcup_{1\leq i\leq n} P_i$, donc il existe $i_c \in \mathbb{N}_n$ tel que $c \in P_{i_c}$.
Supposons qu'il existe $j \in \mathbb{N}_n$ tel que $c \in P_j$. Alors $P_{i_c} \cap P_j \neq \emptyset$, donc $i_c = j$, ce qui prouve l'unicité de i_c.
⋄ Soit $c, d \in C$ tel que $i_c = i_d$.
Alors $c, d \in C \cap P_{i_c}$, donc d'après la question 3, $c = d$. Ceci prouve que l'application $c \longmapsto i_c$ est une injection de C dans $\mathbb{N}_n$.
⋄ Notons f cette application. Alors $f|^{f(C)}$ est une bijection, donc $|C| = |f(C)|$, mais $f(C)$ est une partie de $\mathbb{N}_n$, donc $|C| \leq n$.

6°) De même que pour la question précédente, pour tout $a \in A$, il existe un unique $i_a \in \mathbb{N}_n$ tel que $a \in P_{i_a}$.
Soit $a, b \in A$ tel que $i_a = i_b$. Alors $a, b \in A \cap P_{i_a}$, donc $a = b$. Ceci prouve que l'application $a \longmapsto i_a$ est une injection de A dans $\mathbb{N}_n$. Alors, comme lors de la question précédente, on en déduit que $|A| \leq n$.

7°) ⋄ $\emptyset$ est une chaîne ainsi qu'une antichaîne de E, donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des parties non vides de $\mathbb{N}$, majorées par le cardinal de E. D'après le cours, $\max(\mathcal{C})$ et $\max(\mathcal{A})$ sont donc définis.
Pour tout $e \in E$, $\{e\}$ est à la fois une chaîne et une antichaîne, donc la famille $(\{e\})_{e\in E}$ est une partition de chaînes et d'antichaînes de E (même lorsque E est vide). Ainsi, $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_C$ sont des parties non vides de $\mathbb{N}$. D'après le cours, $\min(\mathcal{P}_A)$ et $\min(\mathcal{P}_C)$ sont définis.
⋄ Il existe une chaîne C de E de cardinal $\max(\mathcal{C})$. Posons $n = \min(\mathcal{P}_A)$. Il existe donc une partition d'antichaînes de E de cardinal n.
D'après la question 5, $\max(\mathcal{C}) = |C| \leq n$. Ceci prouve que $\boxed{\max(\mathcal{C}) \leq \min(\mathcal{P}_A)}$.
De même, la question 6 permet de prouver que $\boxed{\max(\mathcal{A}) \leq \min(\mathcal{P}_C)}$.

Partie II : Deux exemples

8°) a)



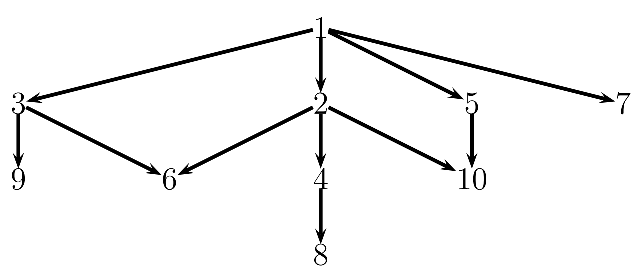
b) Notons $C = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.
C est une chaîne car $\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,2\} \subsetneq \{1,2,3\}$.
Ainsi, $\max(\mathcal{C}) \geq |C| = 4$.
De plus, si l'on pose $P_1 = \{\emptyset\}$, $P_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $P_3 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ et $P_4 = \{\{1,2,3\}\}$, alors (P_1, P_2, P_3, P_4) est une partition d'antichaînes de E.
Ainsi, $\min(\mathcal{P}_A) \leq 4$. On en déduit que $\max(\mathcal{C}) \geq 4 \geq \min(\mathcal{P}_A)$, donc d'après la question 7, $\boxed{\max(\mathcal{C}) = 4 = \min(\mathcal{P}_A)}$.

c) Notons $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. A est une antichaîne, donc $\max(\mathcal{A}) \geq |A| = 3$.
De plus, si l'on pose $P_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$, $P_2 = \{\{2\}, \{2,3\}\}$ et $P_3 = \{\{3\}, \{1,3\}\}$, alors (P_1, P_2, P_3) est une partition de chaînes de E.
Ainsi, $\min(\mathcal{P}_C) \leq 3$. On en déduit que $\max(\mathcal{A}) \geq 3 \geq \min(\mathcal{P}_C)$, donc d'après la question 7, $\boxed{\max(\mathcal{A}) = 3 = \min(\mathcal{P}_C)}$.

9°)

a) Pour tout $n \in E$, $n|n$, donc "$|$" est réflexive.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n|m$ et $m|n$. Alors il existe $h, k \in \mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $m = hn$. On en déduit que $n = khn$, or $n \neq 0$, donc $1 = kl$, donc d'après le cours, $h = k = 1$ puis $n = m$. Ainsi, "$|$" est antisymétrique.
Soit n, m, p tels que $n|m$ et $m|p$. Il existe $h, k \in \mathbb{N}$ tels que $m = kn$ et $p = hm$, donc $p = hkn$, ce qui prouve que $n|p$. Ainsi, "$|$" est transitive.
En conclusion, "$|$" est bien une relation d'ordre.

b)



c) Notons $C = \{1, 2, 4, 8\}$. C est une chaîne, donc $\max(\mathcal{C}) \geq |C| = 4$.
De plus, si l'on pose $P_1 = \{1\}$, $P_2 = \{3, 2, 5, 7\}$, $P_3 = \{9, 6, 4, 10\}$ et $P_4 = \{8\}$, alors (P_1, P_2, P_3, P_4) est une partition d'antichaînes de E.
Ainsi, $\min(\mathcal{P}_A) \leq 4$. On en déduit que $\max(\mathcal{C}) \geq 4 \geq \min(\mathcal{P}_A)$, donc d'après la question 7, $\boxed{\max(\mathcal{C}) = 4 = \min(\mathcal{P}_A)}$.

d) Notons $A = \{9, 6, 4, 10, 7\}$. A est une antichaîne, donc $\max(\mathcal{A}) \geq |A| = 5$.
De plus, si l'on pose $P_1 = \{1, 2, 4, 8\}$, $P_2 = \{3, 9\}$, $P_3 = \{6\}$, $P_4 = \{5, 10\}$, $P_5 = \{7\}$, alors $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ est une partition de chaînes de E.
Ainsi, $\min(\mathcal{P}_C) \leq 5$. On en déduit que $\max(\mathcal{A}) \geq 5 \geq \min(\mathcal{P}_C)$, donc d'après la question 7, $\boxed{\max(\mathcal{A}) = 5 = \min(\mathcal{P}_C)}$.

Partie III : Partitions de chaînes

10°) Soit $i \in \mathbb{N}_\ell$.
On a $x_i < x_{i+1} < \cdots < x_\ell$, donc $\{x_i, \ldots, x_\ell\}$ est une chaîne d'origine x_i de longueur $\ell - i + 1$. Ainsi, $f(x_i) \geq \ell - i + 1$.
Supposons que $f(x_i) > \ell - i + 1$. Posons $j = f(x_i)$. Alors, il existe une chaîne d'origine x_i et de longueur j, donc il existe $y_1, \ldots, y_j \in E$ tels que $y_1 < \cdots < y_j$ avec $y_1 = x_i$. Mézalor $x_1 < \cdots < x_i = y_1 < \cdots < y_j$, donc on dispose d'une chaîne de longueur $i + j$ avec $i + j > i + (\ell - i + 1) = \ell + 1$, ce qui contredit la définition de $\ell = \max(\mathcal{C})$. Ainsi, on a montré que $f(x_i) = \ell - i + 1$.

11°) $\diamond$ Pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, d'après la question précédente, $x_{\ell-i+1} \in A_i$, donc $A_i \neq \emptyset$.
$\diamond$ Soit $x \in E$. Il existe une chaîne d'origine x et de longueur $f(x)$. Par définition de ℓ, cette chaîne est de longueur inférieur à ℓ. Ainsi, $1 \leq f(x) \leq \ell$, or $x \in A_{f(x)}$ donc $x \in \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} A_i$. Ceci prouve que $\bigcup_{1 \leq i \leq \ell} A_i = E$.
$\diamond$ Soit $i, j \in \mathbb{N}_\ell$ tels que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Alors, il existe $x \in A_i \cap A_j$. Dans ce cas, $i = f(x) = j$. Ainsi, par contraposition, $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
En conclusion, $(A_1, \ldots, A_\ell)$ est une partition de E.

12°) $\diamond$ Soit $i \in \mathbb{N}_\ell$. Soit $x, y \in A_i$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $y < x$. $x \in A_i$, donc $i = f(x)$. Ainsi, il existe $x_1, \ldots, x_i \in E$ tels que $x_1 < \cdots < x_i$ et $x_1 = x$. Alors, $y < x_1 < \cdots < x_i$, donc $f(y) \geq i + 1$. C'est faux car $y \in A_i$, donc $f(y) = i$. On en déduit donc que $\neg(y < x)$. De même, on montre que $\neg(x < y)$, donc, si $x \neq y$, alors x et y ne sont pas comparables. Ceci prouve que A_i est une antichaîne.
$\diamond$ On vient de construire une partition constituée de ℓ antichaînes, donc $\min(\mathcal{P}_A) \leq \ell$, or $\ell = \max(\mathcal{C})$. Alors, d'après la question 7, $\min(\mathcal{P}_A) = \max(\mathcal{C})$.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Notons $R(n)$ l'assertion suivante : lorsque $|E| = n$, $\min(\mathcal{P}_A) = \max(\mathcal{C})$.
Supposons que $n = 0$ et que $|E| = 0$. Alors $E = \emptyset$. Dans ce cas, l'unique chaîne est $\emptyset$, donc $\max(\mathcal{C}) = 0$. De plus, l'unique partition d'antichaînes est la famille vide $(P_1, \ldots, P_n)$ avec $n = 0$, donc on a aussi $\min(\mathcal{P}_A) = 0$, ce qui prouve $R(0)$.
Supposons que $n \in \mathbb{N}$ et que $R(k)$ est vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$. Notons A l'ensemble des éléments maximaux de E. D'après la question 1, appliquée avec l'ordre inverse $\geq$, A est non vide, donc $|E \setminus A| \leq n$. On peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence à $E \setminus A$. Il existe donc $\ell \in \mathbb{N}$, qui représente le cardinal maximum des longueurs des chaînes de $E \setminus A$ et le nombre minimum de partition d'antichaînes de $E \setminus A$.

Il existe $x_1, \dots, x_\ell \in E \setminus A$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_\ell$ et il existe une partition d'antichaînes de $E \setminus A$, notée $(P_1, \dots, P_\ell)$.
A est une antichaîne de E, car si $x, y \in A$ avec $x \neq y$, on a $\neg(x < y)$, car x est maximal dans E et on a $\neg(y < x)$ car y est maximal dans E. Ainsi, x et y ne sont pas comparables.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_\ell$, $P_i \subset E \setminus A$, donc $P_i \cap A = \emptyset$; on en déduit que $(P_1, \dots, P_n, A)$ est une partition de E constituée de $\ell + 1$ antichaînes.
De plus $x_\ell \notin A$, donc x_ℓ n'est pas maximal dans E. Ainsi, il existe $x_{\ell+1} \in E$ tel que $x_\ell < x_{\ell+1}$. Alors $\{x_1, \dots, x_{\ell+1}\}$ est une chaîne de longueur $\ell + 1$.
On en déduit que $\min(\mathcal{P}_A) \leq \ell + 1 \leq \max(\mathcal{C})$ et la question 7 permet à nouveau de montrer que $R(n+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence conclut.

Partie IV : Cas particulier de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$

14°) $\diamond$ Posons $C = \{\mathbb{N}_k \ / \ 0 \leq k \leq n\}$. C est une chaîne, car pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\mathbb{N}_{k-1} \subsetneq \mathbb{N}_k$ et $|C| = n + 1$.
$\diamond$ Notons $A = \{F \subset \mathbb{N}_n \ / \ |F| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. D'après le rappel, $|A| = \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$. Il reste à montrer que A est une antichaîne : Soit $B, C \in A$. Ainsi, $|B| = |C|$, donc d'après les rappels, $B \subset C \Longrightarrow B = C$ et $C \subset B \Longrightarrow B = C$. On en déduit que, lorsque $B \neq C$, B et C ne sont pas comparables. Ainsi, A est bien une antichaîne.

15°) D'après la question précédente, $\max(\mathcal{C}) \geq n + 1$.
Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, notons $A_i = \{B \subset \mathbb{N}_n \ / \ |B| = i\}$.
Alors $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une partition de E.
Comme lors de la question précédente, on montre que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, A_i est une antichaîne, donc $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une partition constituée de $n+1$ antichaînes de E. La question 7 permet de montrer que $\max(\mathcal{C}) = n + 1 = \min(\mathcal{P}_A)$.

16°) $\diamond$ Supposons que $n = 1$. Alors $E = \{\emptyset, \{1\}\}$. Dans ce cas, E est déjà une chaîne symétrique (avec $k = 0$), donc la liste (E) constituée du seul élément E est une partition de E constituée de chaînes symétriques.
$\diamond$ Supposons que $n = 2$. Alors $E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
Posons $C_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$, qui est une chaîne symétrique, avec $k = 0$, et $C_2 = \{\{2\}\}$, qui est une chaîne symétrique, avec $k = 1$. Alors (C_1, C_2) est une partition de E constituée de chaînes symétriques.
$\diamond$ Supposons que $n = 3$. On a vu en question 8.c, que si l'on pose
$P_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, $P_2 = \{\{2\}, \{2, 3\}\}$ et $P_3 = \{\{3\}, \{1, 3\}\}$, alors (P_1, P_2, P_3) est une partition de chaînes de E. Or P_1 est symétrique, avec $k = 0$ et P_2, P_3 sont symétriques avec $k = 1$.

17°) $\diamond$. Posons $C' = \{E_k, E_{k+1}, \dots, E_{n-1-k}, E_{n-1-k} \cup \{n\}\}$.
En posant $E_{n-k} = E_{n-1-k} \cup \{n\}$, on a $C' = \{E_k, E_{k+1}, \dots, E_{n-k}\}$. k vérifie bien l'encadrement $k \leq n - k$, de plus, $E_k, \dots, E_{n-k}$ sont des éléments de E tels que

$E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \subset E_{n-k-1} \subset E_{n-1-k} \cup \{n\} = E_{n-k}$ et,
pour tout $i \in \{k, k+1, \ldots, n-k\}$, $|E_i| = i$. Ainsi, C' est une chaîne symétrique de E.
$\diamond$ Posons $C'' = \{E_k \cup \{n\}, E_{k+1} \cup \{n\}, \ldots, E_{n-2-k} \cup \{n\}\}$.
Pour tout $h \in \{k+1, \ldots, n-(k+1)\}$, posons $F_h = E_{h-1} \cup \{n\}$.
Ainsi, $C'' = \{F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_{n-(k+1)}\}$.
Si $k = n-1-k$, c'est-à-dire si n est impair et si $k = \frac{n-1}{2}$, alors $C'' = \emptyset$.
Sinon, alors $k \leq n-k-2$, donc $k+1 \leq n-(k+1)$.
De plus, $F_{k+1}, F_{k+2}, \ldots, F_{n-(k+1)}$ sont des éléments de E et comme
$E_k \subset E_{k+1} \subset \cdots \subset E_{n-k-2}$, on peut affirmer que $F_{k+1} \subset F_{k+2} \subset \cdots \subset F_{n-(k+1)}$. Enfin, pour tout $h \in \{k+1, \ldots, n-(k+1)\}$, $|F_h| = |E_{h-1}| + 1 = h$. Ceci démontre que C'' est une chaîne symétrique.

18°) Soit $h \in \{0, \ldots, n\}$. On note $R(h)$ l'assertion selon laquelle il existe une partition de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_h)$ constituée de chaînes symétriques.
Pour $h = 0$, $\mathbb{N}_0 = \emptyset$, donc $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0) = \{\emptyset\}$. On vérifie alors que $C = \{E_0\}$ avec $E_0 = \emptyset$ est une chaîne symétrique (en prenant $k = 0 = n$ dans la définition d'une chaîne symétrique). Donc (C) est une partition de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ constituée de chaînes symétriques.
On suppose que $1 \leq h \leq n$ et que $R(h-1)$ est vraie.
Il existe donc une partition $(C_1, \ldots, C_N)$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{h-1})$ constituée de chaînes symétriques.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que $k_i \leq h-1-k_i$ et des parties de $\mathbb{N}_{h-1}$ notées $E_{k_i,i}, \ldots, E_{h-1-k_i,i}$ telles que $C_i = \{E_{k_i,i}, \ldots, E_{h-1-k_i,i}\}$, $E_{k_i,i} \subset \cdots \subset E_{h-1-k_i,i}$ et, pour tout $j \in \{k_i, \ldots, h-1-k_i\}$, $|E_{j,i}| = j$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, conformément aux notations de la question précédente, posons $C'_i = \{E_{k_i,i}, \ldots, E_{h-1-k_i,i}, E_{h-1-k_i,i} \cup \{h\}\}$ et $C''_i = \{E_{k_i,i} \cup \{h\}, \ldots, E_{h-2-k_i,i} \cup \{h\}\}$.
D'après la question précédente, pour prouver $R(h)$, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}_h)$ est la réunion disjointe des C'_i et des C''_i lorsque i varie entre 1 et N. Il est possible que certains C''_i soient vides, mais il suffit de les retirer de la liste pour obtenir une partition.
Ceci revient donc à montrer que, pour toute partie F de $\mathbb{N}_h$, il existe un unique $i \in \mathbb{N}_N$ tel que $F \in C'_i$ ou (exclusif) $F \in C''_i$. Soit donc $F \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_h)$.
Premier cas : on suppose que $h \notin F$. Alors $F \subset \mathbb{N}_{h-1}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un unique $i \in \mathbb{N}_N$ tel que $F \subset C_i$. Alors $F \in C'_i$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}_N$, $F \notin C''_j$ et lorsque $j \neq i$, $F \notin C'_j$.
Second cas : on suppose que $h \in F$. Posons $F' = F \setminus \{h\}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un unique $i \in \mathbb{N}_N$ tel que $F' \in C_i$.
Lorsque $F' = \max(C_i)$, alors $F = F' \cup \{h\} = \max(C'_i)$. En particulier, $F \in C'_i$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}_N$, $F \notin C''_j$ et lorsque $j \neq i$, $F \notin C'_j$.
Lorsque $F' \neq \max(C_i)$, alors $F = F' \cup \{h\} \in C''_i$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}_N$, $F \notin C'_j$ et lorsque $j \neq i$, $F \notin C''_j$.
On a donc prouvé $R(h)$.
D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie, ce qu'il fallait démontrer.

19°) $\diamond$ Supposons que $(P_1, \ldots, P_N)$ est une partition de E telle que $P_1, \ldots, P_N$ sont des chaînes symétriques.
Posons $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Comme lors de la question 15, notons A_j l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ dont le cardinal vaut j. On a vu en question 15 que A_j est une antichaîne. Alors, d'après la question 6, pour tout $F \in A_j$, il existe un unique $f(F) \in \mathbb{N}_N$ tel que $F \in P_{f(F)}$. Toujours d'après la question 6, f est une application injective de A_j dans $\mathbb{N}_N$. Montrons que f est également surjective.
Soit $i \in \mathbb{N}_N$. P_i est une chaîne symétrique de E, donc $P_i = \{E_k, E_{k+1}, \ldots, E_{n-k}\}$ où $k \leq n - k$ et où $E_k, \ldots, E_{n-k}$ vérifient les propriétés indiquées dans l'énoncé avant la question 16.
On a $2k \leq n$, donc $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. De plus, $n - k \geq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ainsi, $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est un entier compris entre k et $n - k$, or $|E_j| = j$. Ainsi, P_i possède partie F de cardinal j. Alors $F \in A_j$ et $f(F) = i$, ce qui prouve que f est surjective.
Ainsi, f est une bijection de $\mathcal{P}_j$ dans $\mathbb{N}_N$. On en déduit que $N = |\mathbb{N}_N| = |\mathcal{P}_j| = \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$, d'après le rappel de l'énoncé au début de cette partie.
$\diamond$ D'après la question 18, il existe donc une partition de E constituée de $\begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$ chaînes. On en déduit que $\min(\mathcal{P}_C) \leq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$, mais d'après la question 14, $\max(\mathcal{A}) \geq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$. Alors, d'après la question 7, $\boxed{\max(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix} = \min(\mathcal{P}_C)}$.
$\diamond$ Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Notons encore A_k l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ qui sont de cardinal k. D'après la question 15, A_k est une antichaîne de E et d'après l'énoncé, $|A_k| = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. On en déduit que $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} n \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{pmatrix}$.

Partie V : Théorème de Dilworth

20°) Choisissons une antichaîne A de cardinal α. Par hypothèse, $C \cap A \neq \emptyset$, donc d'après la question 3, $C \cap A$ est un singleton.
En particulier, C est non vide, donc $|E \setminus C| < |E|$. Ainsi, le théorème de Dilworth est démontré pour $E \setminus C$.
$A \setminus (C \cap A) = A \cap \overline{C \cap A} = A \cap (\overline{C} \cup \overline{A}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C}) = A \cap \overline{C} = A \cap (E \setminus C)$, donc $|A \cap (E \setminus C)| = \alpha - 1$, or $A \cap (E \setminus C)$ est une partie d'une antichaîne, donc c'est une antichaîne de $E \setminus C$. Ainsi, $E \setminus C$ possède au moins une antichaîne de cardinal $\alpha - 1$. De plus, si $E \setminus C$ possédait une antichaîne de cardinal α, ce serait une antichaîne de E de cardinal α qui ne rencontre pas C, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, dans $E \setminus C$, le maximum des cardinaux des antichaînes est égal à $\alpha - 1$. Il existe donc une partition $(C_1, \ldots, C_{\alpha-1})$ de $E \setminus C$ constituée de chaînes. Alors $(C_1, \ldots, C_{\alpha-1}, C)$ est une partition de E constituée de α chaînes de E. On en déduit que $\min(\mathcal{P}_C) \leq \alpha = \max(\mathcal{A})$, puis d'après la question 7, que $\min(\mathcal{P}_C) = \max(\mathcal{A})$.

21°) $\diamond$ Soit $x \in E$. Supposons que $x \notin (A_+ \cup A_-)$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $\neg(a \leq x)$ et $\neg(a \geq x)$, donc x n'est comparable avec aucun élément de A. Alors $A \cup \{x\}$ est une antichaîne, de cardinal $\alpha + 1$, ce qui est impossible par définition de α. Ainsi, $x \in (A_+ \cup A_-)$, ce qui montre que $A_+ \cup A_- = E$.
$\diamond$ Si $a \in A$, $a \leq a$ donc $a \in A_+ \cap A_-$.
Réciproquement, soit $b \in A_+ \cap A_-$. Il existe $a, a' \in A$ tels que $a \leq b \leq a'$. Alors a et a' sont comparables, mais A est une antichaîne, donc $a = a'$, puis $a = b = a'$. Ainsi, $b \in A$. On a bien montré que $A_+ \cap A_- = A$.

22°) Supposons que $\min(C) \in A_+$. Il existe $a \in A$ tel que $a \leq \min(C)$. $a \neq \min(C)$, car $C \cap A = \emptyset$, donc $a < \min(C)$. Alors $\{a\} \cup C$ est une chaîne, de cardinal $|C| + 1 = \max(\mathcal{C}) + 1$, ce qui est impossible par définition de $\mathcal{C}$. Ainsi, $\min(C) \notin A_+$, ce qui prouve que $A_+ \neq E$. De même, on montre que $\max(C) \notin A_-$, ce qui prouve que $A_- \neq E$.

23°) $\diamond$ Ainsi, $|A_-| < |E|$ et $|A_+| < |E|$, donc le théorème de Dilworth est démontré pour A_- et pour A_+.
$\diamond$ $A \subset A_-$, donc A est une antichaîne de A_-. De plus, toute antichaîne de A_- est une antichaîne de E, donc il n'existe pas dans A_- d'antichaîne de cardinal strictement supérieur à α. Ainsi, α est le cardinal maximal des antichaînes de A_-. De même, α est le cardinal maximal des antichaînes de A_+. Il existe donc une partition $(C'_1, \ldots, C'_\alpha)$ de A_- constituée de chaînes et une partition $(C''_1, \ldots, C''_\alpha)$ de A_+ constituée de chaînes.
$\diamond$ A est une antichaîne de A_- et $(C'_1, \ldots, C'_\alpha)$ est une partition de chaînes de A_-, donc d'après la question 6, pour tout $a \in A$, il existe un unique $f(a) \in \mathbb{N}_\alpha$ tel que $a \in C'_{f(a)}$. Alors, toujours d'après la question 6, f est une application injective de A dans $\mathbb{N}_\alpha$. D'après les rappels au début de l'énoncé, comme $|A| = \alpha$, f est une bijection de A dans $\mathbb{N}_\alpha$.
$\diamond$ Pour tout $i \in \mathbb{N}_\alpha$, posons $a_i = f^{-1}(i)$. Ainsi, $a_i \in A \cap C'_i$.
Soit $i \in \mathbb{N}_\alpha$. Posons $x = \max(C'_i)$. Alors $x \in A_-$, donc il existe $a \in A$ tel que $x \leq a$. Or $a_i \in C'_i$, donc $a_i \leq x \leq a$, mais a et a_i sont deux éléments de l'antichaîne A, donc $a_i = a$, puis $x = a_i$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_\alpha$, $a_i = \max(C_i)$.
En raisonnant de même dans A_+, on montre que, quitte à modifier l'ordre de $C''_1, \ldots, C''_\alpha$, pour tout $i \in \mathbb{N}_\alpha$, $a_i = \min(C''_i)$.
$\diamond$ Pour tout $i \in \mathbb{N}_\alpha$, posons $C_i = C'_i \cup C''_i$.
Soit $i \in \mathbb{N}_\alpha$. C_i est une chaîne car, si $x, y \in C_i$, lorsque $x, y \in C'_i$ ou $x, y \in C''_i$, x et y sont comparables car C'_i et C''_i sont des chaînes, et lorsque $x \in C'_i$ et $y \in C''_i$, on a $x \leq a_i \leq y$.
Soit $x \in E$. Si $x \in A$, il existe un unique $i \in \mathbb{N}_\alpha$ tel que $x = a_i$, donc il existe un unique $i \in \mathbb{N}_\alpha$ tel que $x \in C_i$.
Si $x \in A_+ \setminus A$, il existe un unique $i \in \mathbb{N}_\alpha$ tel que $x \in C''_i$, car $(C''_1, \ldots, C''_\alpha)$ est une partition de A_+, donc il existe un unique $i \in \mathbb{N}_\alpha$ tel que $x \in C_i$.
On raisonne de même lorsque $x \in A_- \setminus A$.
Ceci démontre que $(C_1, \ldots, C_\alpha)$ est une partition de E et elle est constituée de α chaînes. On en déduit alors que $\max(\mathcal{A}) = \min(\mathcal{P}_C)$.

$\diamond$ Ainsi, en tenant compte de la question 20, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème de Dilworth est démontré lorsque $|E| = n$, si l'on suppose qu'il est démontré pour tout ensemble ordonné de cardinal inférieur ou égal à $n-1$. Ainsi, d'après le principe de récurrence forte, il reste à montrer le théorème de Dilworth lorsque $|E| = 0$, c'est-à-dire lorsque $E = \emptyset$, mais dans ce cas, $\mathcal{A} = \{0\} = \mathcal{P}_C$, donc $\max(\mathcal{A}) = 0 = \min(\mathcal{P}_C)$, ce qui conclut.