# Feuille d'exercices 6.
# Corrigé des exercices 10 à 13.

**Exercice 6.10 :**

**1°)** Par la formule du binôme de Newton, $(3+2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(2\sqrt{2})^k$,

donc en séparant les indices pairs et impairs,

$(3+2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^{n-2k}8^k + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1}8^k 2\sqrt{2}$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq 2k+1 \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ et $0 \leq 2k \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ainsi, on a bien $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, en posant $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 3^{n-2k}8^k$

et $b_n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1}8^k$. De plus, $a_n$ et $b_n$ sont bien des entiers naturels.

**2°)** $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9-8 = 1$, donc $(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n = 1^n = 1$, or un calcul analogue à celui de la première question montre que $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, donc $(a_n, b_n) \in H$, si l'on note $H = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \ / \ x^2 - 2y^2 = 1\}$.
Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq p$. Supposons que $(a_n, b_n) = (a_p, b_p)$.
Alors $a_n + b_n\sqrt{2} = a_p + b_p\sqrt{2}$, donc $(3+2\sqrt{2})^n = (3+2\sqrt{2})^p$, donc $n = p$.
On en déduit que $\{(a_n, b_n) \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est un partie infinie de $H$, ce qui conclut.

**Exercice 6.11 :**

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on sait que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor \leq \sqrt{k} < \lfloor \sqrt{k} \rfloor + 1$, donc $\sqrt{k} - \lfloor \sqrt{k} \rfloor < 1$. Ainsi $E$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par 1, donc d'après la propriété de la borne supérieure, $E$ admet un sup et $\sup(E) \leq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\alpha_n = \sqrt{n^2-1} - \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor$ : $\alpha_n \in E$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n^2 - 1 < n^2$, donc $\sqrt{n^2-1} < n$ puis $\lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor < n$.
De plus, $n-1 \leq \sqrt{n^2-1} \Longleftrightarrow n^2-2n+1 \leq n^2-1 \Longleftrightarrow n \geq 1$. Cette dernière propriété est vraie, donc $n-1 \leq \sqrt{n^2-1}$, puis $\lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor \geq n-1$.
Ainsi, $\lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor = n-1$ et $\alpha_n = \sqrt{n^2-1} - n + 1$.
À l'aide de la quantité conjuguée, on obtient
$\alpha_n = 1 + \frac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{\sqrt{n^2-1}+n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \leq \sup(E)$, donc en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, $1 \leq \sup(E)$. En conclusion, on a montré que $\sup(E) = 1$.

**Exercice 6.12 :**

$\diamond$ Commençons par montrer que la propriété devient fausse avec une famille infinie d'intervalles. En effet, si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $I_n = [n, n+1]$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n = \mathbb{R}$ est un intervalle, mais, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, $J = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} [n, n+1] = \mathbb{R}\setminus ]k, k+1[$ n'est pas un intervalle, car ce n'est pas convexe : en effet, $k \in J$, $k+1 \in J$, mais $[k, k+1] \not\subset J$.

$\diamond$ Lorsque $n = 1$, la propriété à démontrer est vraie car $I_1 \setminus I_1 = \emptyset$ est un intervalle. Pour la suite, on suppose donc que $n \geq 2$.

Les deux méthodes proposées sont très proches, il s'agit plutôt de 2 façons de présenter la même démonstration.

$\diamond$ *Première méthode :*
La propriété à démontrer ainsi que les hypothèses ne dépendent pas de l'ordre de la famille $(I_j)_{1\leq j\leq n}$, donc on peut la réordonner en imposant que la suite $(\inf(I_j))_{1\leq j\leq n}$ soit croissante dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Lorsque $\inf(I_1) = \inf(I_2)$, si de plus $\inf(I_1) \in I_1 \cup I_2$, quitte à échanger $I_1$ et $I_2$, on supposera de plus que $\inf(I_1) \in I_1$. On notera $(*)$ cette hypothèse.
Si $I_2 \subset I_1$, alors $I_1 = I_1 \cup I_2$, donc $\bigcup_{j\in\mathbb{N}_n\setminus\{2\}} I_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}_n} I_j$ est un intervalle, ce qu'il fallait démontrer.
Pour la suite, on suppose donc que $I_2$ n'est pas inclus dans $I_1$. Ceci implique que $\sup(I_1) \leq \sup(I_2)$, car sinon, on aurait $\inf(I_1) \leq \inf(I_2)$ et $\sup(I_2) < \sup(I_1)$, donc si $\inf(I_1) < \inf(I_2)$, alors $I_2 \subset I_1$, ce qui est faux, et si $\inf(I_1) = \inf(I_2)$, alors d'après l'hypothèse $(*)$, on a encore $I_2 \subset I_1$.
Posons $J = \bigcup_{2\leq j\leq n} I_j$ et montrons que $J$ est convexe : soit $a, b \in J$ avec $a < b$. Soit $x \in ]a, b[$. Il suffit de montrer que $x \in J$.
Notons également $I = \bigcup_{1\leq j\leq n} I_j$. $J \subset I$, donc $a, b \in I$, or $I$ est un intervalle, donc $x \in I$.
Supposons que $x \in I_1$. Ainsi, $x \leq \sup(I_1) \leq \sup(I_2)$.
De plus $a \geq \inf(J) = \min_{2\leq j\leq n} \inf(I_j) = \inf(I_2)$, or $x > a$, donc $\inf(I_2) < x \leq \sup(I_2)$.
Ceci implique que $x \in I_2$, car sinon, on aurait $x = \sup(I_2)$ et $\sup(I_2) \notin I_2$, mais $x \in I_1$ et $\sup(I_1) \leq \sup(I_2)$, donc $\sup(I_1) = \sup(I_2) = x$. On aurait donc $\inf(I_1) \leq \inf(I_2)$, $\sup(I_1) = \sup(I_2)$ et $\sup(I_2) \notin I_2$. On en déduit alors que $I_2 \subset I_1$, en utilisant à nouveau $(*)$ lorsque $\inf(I_1) = \inf(I_2)$. Or $I_2 \not\subset I_1$.
Ainsi, on a montré que $x \in I_1 \Longrightarrow x \in I_2$. Or $x \in I$, donc $x \in J$ ou $x \in I_1$. Dans tous les cas, $x \in J$, ce qui achève la preuve.
$\diamond$ *Deuxième méthode :*

L'ensemble $\{\inf(I_j) \ / \ j \in \mathbb{N}_n\}$ est une partie finie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, qui est totalement ordonné, donc (exercice classique ou résultat considéré comme inclus dans le cours), cet ensemble admet un maximum, que l'on notera $\inf(I_\ell)$.
Dans le cas où il existe $j \in \mathbb{N}_n$ tel que $\inf(I_j) = \inf(I_\ell)$ et $\inf(I_j) \notin I_j$, on remplace $\ell$ par $j$, de sorte que $\inf(I_\ell) \notin I_\ell$. On notera $(*)$ cette hypothèse.
Posons $J = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{\ell\}} I_j$ et montrons que $J$ est convexe. Soit donc $a, b \in J$ avec $a < b$.
Il s'agit de montrer que $x \in J$.
Notons également $I = \bigcup_{1 \leq j \leq n} I_j$. $J \subset I$, donc $a, b \in I$, or $I$ est un intervalle, donc $x \in I$.
Si $x \notin I_\ell$, alors $x \in I \setminus I_\ell \subset J$, donc $x \in J$.
Supposons que $x \in I_\ell$.
$n \geq 2$, donc il existe $a \in \mathbb{N}_n \setminus \{\ell\}$ tel que $\sup(I_a) = \max_{j \in \mathbb{N}_n \setminus \{\ell\}} \sup(I_j)$.
Alors $x < a \leq \sup(I_a)$. De plus, $x \in I_\ell$,
donc $x \geq \inf(I_\ell) \geq \inf(I_a)$ (par construction de $\ell$).
Si $x > \inf(I_a)$, alors $x \in I_a$, donc $x \in J$.
Il reste à traiter le cas où $x \in I_\ell$ et où $x = \inf(I_a)$. Dans ce cas,
$\inf(I_\ell) \leq x = \inf(I_a)$ (car $x \in I_\ell$), mais par construction de $\ell$, $\inf(I_\ell) \geq \inf(I_a)$, donc $\inf(I_\ell) = \inf(I_a) = x < \sup(I_a)$.
Si $x \notin I_a$, alors $\inf(I_a) \notin I_a$, donc d'après l'hypothèse $(*)$, $x = \inf(I_\ell) \notin I_\ell$, ce qui est faux. Ainsi, même dans ce dernier cas, $x \in I_a$.
Dans tous les cas, on a donc montré que $x \in J$.

**Exercice 6.13 :**

On présente les deux méthodes usuelles : montrer que tout $x \in \mathbb{R}_+$ est limite d'une suite d'éléments de $B$, ou bien montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x < y$, il existe $b \in B$ tel que $x < b < y$. Pour cet exercice, la première méthode est plus simple.

*Première méthode :* $A$ n'est pas majorée, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n \geq n$. En particulier, $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'idée est d'écrire que $x = \dfrac{a_n}{\left(\frac{a_n}{x}\right)}$, donc lorsque $\frac{a_n}{x}$ est grand, $x$ vaut à peu près $\dfrac{a_n}{\left\lfloor \frac{a_n}{x} \right\rfloor}$ qui est dans $B$.
Plus précisément, si $x = 0$, alors $\dfrac{a_0}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_0}{n} \in B$.
Supposons maintenant que $x > 0$. Posons $N = \lfloor x \rfloor$. Pour tout $n \geq N$, $a_n \geq n \geq x$, donc $\left\lfloor \dfrac{a_n}{x} \right\rfloor \geq 1$. On peut donc poser $b_n = \dfrac{a_n}{\left\lfloor \frac{a_n}{x} \right\rfloor}$ : $b_n \in B$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{t-1}{t} < \dfrac{\lfloor t \rfloor}{t} \leq 1$, donc d'après le principe des gendarmes, $\dfrac{\lfloor t \rfloor}{t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Or $\dfrac{a_n}{x} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition des limites, $b_n = x \times \dfrac{\left(\frac{a_n}{x}\right)}{\left\lfloor \frac{a_n}{x} \right\rfloor} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.

*Seconde méthode :* Il suffit de montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$, il existe $b \in B$ tel que $x < b < y$. En effet, dans ce cas, si $z \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $b \in B$ tel que $\frac{z}{2} < h < z$, donc tel que $0 < b < z$, ce qui prouve que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x < y$, il existe $b \in B$ tel que $x < b < y$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$.

$$\begin{aligned} \exists b \in B \cap ]x, y[ &\iff \exists b \in \mathbb{R}_+,\ \ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \ b \in \tfrac{1}{n} A \cap ]x, y[ \\ &\iff \exists a \in A,\ \ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \ nx < a < ny. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)x < ny \iff n(y-x) > x \iff n > \dfrac{x}{y-x}$, donc si l'on pose $n_0 = \left\lfloor \dfrac{x}{y-x} \right\rfloor + 1$, pour tout $n \geq n_0$, $(n+1)x < ny$.
$A$ n'est pas majorée, donc il existe $a \in A$ tel que $a > n_0 x$.
Il existe un unique entier $n$ tel que $n < \frac{a}{x} \leq n+1$. Alors $nx < a \leq (n+1)x$. Cette dernière inégalité impose $n \geq n_0$ (sinon, $n < n_0$ donc $n + 1 \leq n_0$,
puis $(n+1)x \leq n_0 x < a$), donc on a $nx < a \leq (n+1)x < ny$,
puis $x < \frac{a}{n} < y$ avec $\frac{a}{n} \in B$.