# DS 3

**Les calculatrices sont interdites.**

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

## Problème 1 : Étude de bornes supérieures

Dans tout ce problème,
$E$ désigne un ensemble et $\leq$ désigne un ordre sur $E$, partiel ou total.

### Partie I : Éléments sup-irréductibles

**1°)** Soit $I$ un ensemble quelconque et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de $E$ telle que, pour tout $i \in I$, $A_i$ possède une borne supérieure.

— Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ et $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$ ont les mêmes majorants.

— En déduire que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ admet une borne supérieure si et seulement si $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$ admet une borne supérieure et que dans ce cas, $\sup\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \sup(\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\})$.

Lorsque $x \in E$, on dit que $x$ est sup-irréductible si et seulement si pour toute partie $X$ de $E$ admettant une borne supérieure, $x = \sup(X) \Longrightarrow x \in X$.

**2°)** Lorsque $E = \mathbb{R}$, muni de son ordre usuel, quels sont les réels sup-irréductibles ?

**3°)** Pour cette seule question, on suppose que $E = \mathbb{N}$ et que, pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$ si et seulement si $x$ divise $y$, c'est-à-dire que $\leq$ désigne la relation de divisibilité (on ne demande pas de montrer que la relation de divisibilité est une relation d'ordre). Quels sont éléments sup-irréductibles de $\mathbb{N}$ ?

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que $E$ est **fini**.
Lorsque $x \in E$, on note $E^{-}x$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $y < x$ et tels que $\{z \in E \ / \ y < z < x\}$ est vide.

**4°)** Soit $x, y \in E$. Montrer que $y \in E^{-}x$ si et seulement si $y$ est un élément maximal de $\{a \in E \ / \ a < x\}$.

**5°)** Montrer que toute partie non vide de $E$ possède au moins un élément maximal.

**6°)** Montrer que $x$ est un élément minimal de $E$ si et seulement si $E^{-}x = \emptyset$.

**7°)** Montrer que, pour tout $x \in E$, les éléments de $E^{-}x$ sont deux à deux non comparables.

**8°)** On suppose que $x$ est un élément sup-irréductible de $E$. On suppose également que $E^{-}x$ est une partie non vide de $E$ qui possède une borne supérieure notée $s$.
Montrer que $x > s$.
Montrer que $E^{-}x$ est un singleton.

**9°)** Soit $x \in E$.
On suppose que $E^{-}x$ est un singleton. On note $y$ l'unique élément de $E^{-}x$.
Soit $z \in E$ tel que $z < x$. Montrer que $z \leq y$.

**10°)** Soit $x \in E$. On suppose que $E^{-}x$ possède au moins deux éléments et que $E^{-}x$ n'admet pas de borne supérieure.
Montrer que $x$ est un élément minimal de l'ensemble des majorants de $E^{-}x$.
Montrer qu'il existe un majorant $y$ de $E^{-}x$ non comparable avec $x$.

**11°)** Soit $x \in E$. Montrer que $x$ est sup-irréductible si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est satisfaite :

- $x$ est un élément minimal de $E$ mais ce n'est pas le minimum de $E$ ;
- $E^{-}x$ est un singleton ;
- $E^{-}x$ possède au moins deux éléments et $E^{-}x$ ne possède pas de borne supérieure.

## Partie II : Parties sup-génératrices

On note $S(E)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles de $E$.

Lorsque $G$ est une partie de $E$, on dit que $G$ est sup-génératrice si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe $X \subset G$ tel que $X$ possède une borne supérieure et $x = \sup(X)$.

Pour tout $x \in E$, on note $h(x)$ l'entier $k$ maximal pour lequel il existe $x_1, \ldots, x_k \in E$ tel que $x_1 < \cdots < x_k = x$.

**12°)** Lorsque $x \in E$, donner une définition plus formelle de $h(x)$ et vérifier que $h(x)$ est correctement défini.

**13°)** Soit $x \in E$. Montrer que si $x$ n'est pas sup-irréductible, il existe $X \subset E$ tel que $\sup(X) = x$ et tel que, pour tout $y \in X$, $h(y) < h(x)$.

**14°)** Montrer que $S(E)$ est une partie sup-génératrice de $E$.

Pour tout $x \in E$, on note $S_x(E) = \{s \in S(E) \ / \ s \leq x\}$.

**15°)** Montrer que $\sup(S_x(E)) = x$.

**16°)** Soit $G$ une partie de $E$.
Montrer que $G$ est sup-génératrice si et seulement si elle contient $S(E)$.

# Problème 2 : Le postulat de Bertrand

Le postulat de Bertrand affirme que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe au moins un nombre premier entre $n+1$ et $2n$. Ce résultat fut prouvé par Pafnouti Tchebychev en 1850. Nous suivons ici la démonstration publiée par Paul Erdös en 1932 dans son premier article, il n'avait alors que 19 ans.

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n = \{p \in \mathbb{P} \ / \ 0 \leq p \leq n\}$.

## Partie I : majoration du produit des premiers nombres premiers

**1°)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$,
le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est aussi égal à $\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$.

**2°)** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En développant $(1+1)^{2m+1}$ par la formule du binôme de Newton, montrer que $\begin{pmatrix} 2m+1 \\ m+1 \end{pmatrix} \leq 4^m$.

**3°)** Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,
montrer que le produit $\displaystyle\prod_{p \in (\mathbb{P}_{2m+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1})} p$ divise le coefficient binomial $\begin{pmatrix} 2m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$.

**4°)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p \ \leq 4^n$.

## Partie II : une formule de Legendre

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$ et $p \in \mathbb{P}$.

**5°)** Donner une expression de $\min(\{k \in \mathbb{N} \ / \ n < p^k\})$ en fonction de $n$ et de $p$.

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, il existe une unique famille presque nulle $(w_q)_{q \in \mathbb{P}}$ d'entiers naturels telle que $n = \displaystyle\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{w_q}$. Pour tout $q \in \mathbb{P}$, on notera $w_q = v_q(n)$ : c'est la valuation $q$-adique de l'entier $n$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega_k = \{a \in \{1, \ldots, n\} \ / \ v_p(a) = k\}$.

**6°)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que le cardinal de $\Omega_k$ est égal à $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$,
où $\lfloor . \rfloor$ désigne l'application partie entière.

**7°)** Montrer la formule de Legendre : $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k \geq 1} \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$.

## Partie III : diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$

Pour toute la suite de ce problème, on fixe un entier $n$ tel que $n \geq 2$
et on suppose qu'il n'y a aucun nombre premier $p$ tel que $n+1 \leq p \leq 2n$.

On pose $a_n = \binom{2n}{n}$ (il s'agit d'un coefficient binomial).

Dans toute cette partie, $p$ désigne un nombre premier qui divise $a_n$.

**8°)** Montrer que $p \leq 2n$, puis que $p \leq n$.

**9°)** Montrer que $p \leq \frac{2n}{3}$.

**10°)** Montrer que $v_p(a_n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$.

En déduire que $v_p(a_n) \leq \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$.

**11°)** Lorsque $p > \sqrt{2n}$, montrer que $v_p(a_n) \leq 1$.
Montrer que $p^{v_p(a_n)} \leq 2n$ (même lorsque $p \leq \sqrt{2n}$).

## Partie IV : démonstration du postulat de Bertrand

**12°)** Montrer que $a_n \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$.

**13°)** Etudier les variations de la suite $\left( \binom{2n}{k} \right)_{0 \leq k \leq 2n}$ et déterminer le maximum des éléments de cette suite.

**14°)** Montrer que $a_n \geq \frac{4^n}{2n}$.

**15°)** Montrer que $\frac{\ln(\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} \geq \frac{\ln 2}{6}$.

**16°)** Montrer que $\frac{\ln 2}{6} \geq \frac{\ln(32)}{32}$
et en déduire que $n \leq 512$ (on admettra que $\frac{e^2}{2} \in ]3, 4[$) et expliquer comment conclure.