DS 3 : un corrigé

Problème 1 : Éléments sup-irréductibles et parties sup-génératrices

Partie I : Éléments sup-irréductibles

1°) $\diamond$ Soit M un majorant de $\bigcup_{i \in I} A_i$.
Soit $j \in I$: A_j est inclus dans $\bigcup_{i \in I} A_i$, donc M majore A_j, or $\sup(A_j)$ est le plus petit des majorants de A_j, donc $M \geq \sup(A_j)$. Ainsi M est un majorant de $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$.
Réciproquement, soit M un majorant de $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$.
Soit $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$.
On a alors : $x \leq \sup(A_i) \leq M$. Ainsi, M est bien un majorant de $\bigcup_{i \in I} A_i$.
Les ensembles $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$ ont donc les mêmes majorants.
$\diamond$ Supposons que $\bigcup_{i \in I} A_i$ possède une borne supérieure, notée s. Alors s est le minimum de l'ensemble des majorants de $\bigcup_{i \in I} A_i$, donc d'après le point précédent, c'est le minimum de l'ensemble des majorants de $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$. Ainsi, $\{\sup(A_i) \ / \ i \in I\}$ possède une borne supérieure égale à s. La réciproque est analogue, donc la question est prouvée.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $x = \sup(]-\infty, x[)$: en effet, x majore $]-\infty, x[$ et si $y \in]-\infty, x[$ alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $y < z < x$, donc y ne majore pas $]-\infty, x[$. Ainsi, x est bien le plus petit des majorants de $]-\infty, x[$. Donc $x = \sup(]-\infty, x[)$, cependant $x \notin]-\infty, x[$, donc x n'est pas sup-irréductible. On a montré qu'aucun réel n'est sup-irréductible.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\diamond$ Supposons d'abord que $n = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \mid k$, donc $1 = \min(\mathbb{N})$.
Posons $X = \emptyset$. L'ensemble des majorants de X est $\mathbb{N}$, donc $1 = \sup(X)$, mais $1 \notin X$.
Ceci prouve que 1 n'est pas sup-irréductible.

$\diamond$ Supposons que $n = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \mid 0$ car $0 = 0 \times k$, donc $0 = \max(\mathbb{N})$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k+1$ divise k, alors il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $k = h(k+1)$. Nécessairement, $h \neq 0$, donc, pour l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, $k \geq k+1$, ce qui est faux. Ainsi, k n'est pas un majorant de $\mathbb{N}^*$. L'ensemble des majorants de $\mathbb{N}^*$ est donc égal à $\{0\}$. Alors $0 = \sup(\mathbb{N}^*)$ mais $0 \notin \mathbb{N}^*$, donc 0 n'est pas sup-irréductible.
$\diamond$ On peut maintenant supposer que $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Supposons d'abord que n est une puissance d'un nombre premier : il existe $p \in \mathbb{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p^k$.
Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle X possède un sup avec $n = \sup(X)$.
Soit $x \in X$. x divise $n = p^k$, donc il existe $h \in \{0, \ldots, k\}$ tel que $x = p^h$.
Si $n \notin X$, alors $X \subset \{p^h \;/\; h \in \{0, \ldots, k-1\}\}$ et p^{k-1} majore X. C'est faux car p^{k-1} divise p^k et $p^{k-1} \neq p^k$, donc n ne serait pas le plus petit majorant de X. Ainsi, $n \in X$, pour toute partie X telle que $n = \sup(X)$; n est sup-irréductible.
$\diamond$ Supposons enfin que n n'est pas une puissance d'un nombre premier. Sa décomposition primaire est alors de la forme $n = \prod\limits_{1 \leq i \leq k} p_i^{v_i}$, où $k \geq 2$, $p_1, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et où $v_1, \ldots, v_k$ sont des entiers non nuls.
Posons $a = p_1^{v_1}$ et $b = \prod\limits_{2 \leq i \leq k} p_i^{v_i}$. Notons $X = \{a, b\}$.
Clairement, n majore X.
Soit c un majorant de X. Alors a et b divisent c, or a et b sont premiers entre eux, donc $n = ab$ divise c. n est donc le plus petit des majorants de X. Alors $n = \sup(X)$, mais $n \notin X$, donc n n'est pas sup-irréductible.
En conclusion, les sup-irréductibles de $\mathbb{N}$ pour la relation de divisibilité sont les puissances des nombres premiers, différentes de 1.

4°) Notons $A = \{a \in E \;/\; a < x\}$.
y est un élément maximal de A si et seulement si $y \in A$ et si, pour tout $z \in A$, $\neg(y < z)$, donc si et seulement si $y < x$ et si $\{z \in A \;/\; y < z\}$ est vide, c'est-à-dire si et seulement si $y \in E^{-}x$, ce qui conclut.

5°) Soit X une partie non vide de E.
Supposons que X ne possède aucun élément maximal.
X est non vide, donc il existe $x_0 \in X$.
x_0 n'est pas maximal dans X, donc il existe $x_1 \in X$ tel que $x_0 < x_1$.
Supposons construits $x_0, \ldots, x_n \in X$ tels que $x_0 < \cdots < x_n$, où $n \geq 1$.
x_n n'est pas maximal dans X, donc il existe $x_{n+1} \in X$ tel que $x_n < x_{n+1}$.
Par récurrence, on a ainsi construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élements de X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$. Alors par transitivité de $\leq$, $x_p \leq x_q$. Si $x_p = x_q$, alors $x_p \leq x_{p+1} \leq x_q = x_p$, donc $x_p = x_{p+1}$ ce qui est faux. Ainsi, $x_p \neq x_q$. Ceci prouve que l'application $p \longmapsto x_p$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans E. C'est impossible car E est un ensemble fini. Ainsi, X possède nécessairement au moins un élément maximal.

6°) Supposons que E^-x est non vide. Il existe $y \in E^-x$. Alors $y < x$, donc x n'est pas minimal dans E.
Réciproquement, supposons que x n'est pas minimal dans E.
Posons $X = \{a \in E \,/ a < x\}$. Alors X est non vide, donc d'après la question précédente, X possède un élément maximal, puis d'après la question 4, $E^-x \neq \emptyset$.

7°) Soit $x \in E$. Soit $y, z \in E^-x$ avec $y \neq z$. Supposons que y et z sont comparables. Sans perte de généralité, on peut supposer que $y < z$. Alors $y < z < x$,
donc $\{a \in E \,/\, y < a < x\}$ est non vide, ce qui est faux car $y \in E^-x$.
Ainsi, y et z ne sont pas comparables.

8°) $\diamond$ Par définition de E^-x, x est un majorant de E^-x, or s est le plus petit des majorants, donc $x \geq s$.
De plus, si $x = s = \sup(E^-x)$, x étant sup-irréductible, $x \in E^-x$, donc $x < x$, ce qui est faux. Ainsi, $s < x$.
$\diamond$ Soit $y \in E^-x$. s majore E^-x, donc $y \leq s$. Supposons que $y \neq s$. Alors $y < s < x$, donc $\{a \in E \,/\, y < a < x\}$ est non vide, ce qui est faux car $y \in E^-x$. Ainsi, $y = s$. Ceci montre que $E^-x \subset \{s\}$, or E^-x est non vide, donc E^-x est bien un singleton.

9°) Notons $K = \{a \in E \,/\, z \leq a < x\}$. $z \in K$, donc K est non vide. D'après la question 5, K possède au moins un élément maximal, que l'on notera b.
Soit $c \in E$ tel que $c < x$. Supposons que $c \geq b$. Ainsi, $z \leq b \leq c < x$, donc $c \in K$, or b est maximal dans K, donc $c = b$. Ceci prouve que b est maximal dans $\{a \in E \,/\, a < x\}$.
D'après la question 4, $b \in E^-x$, donc $b = y$.
Ceci prouve que $y \in K$ donc $z \leq y$.

10°) $\diamond$ Notons M l'ensemble des majorants de E^-x. On sait que $x \in M$.
Supposons que x n'est pas minimal dans M. Alors il existe $y \in M$ tel que $y < x$.
Soit $z \in E^-x$. Alors $z \leq y < x$, or $\{a \in E \,/\, z < a < x\}$ est vide, donc $z = y$. Ainsi, $E^-x \subset \{y\}$, ce qui est faux car E^-x possède au moins deux éléments. On a montré que x est minimal dans M.
$\diamond$ Par hypothèse, E^-x ne possède pas de borne supérieure,
donc x n'est pas le minimum de M.
Ainsi, il existe $y \in M$ tel que $\neg(x \leq y)$. Or $\neg(y < x)$ car x est minimal dans M, donc x et y ne sont pas comparables et y est un majorant de E^-x.

11°) $\bullet$ Supposons d'abord qu'aucune de ces trois conditions n'est vérifiée.
Si E possède un minimum avec $x = \min(E)$, alors $x = \sup(\emptyset)$ (en effet, l'ensemble des majorants de $\emptyset$ est E dont le minimum est x), mais $x \notin \emptyset$, donc x n'est pas sup-irréductible.
Sinon, d'après la question 6, E^-x possède au moins 2 éléments et il possède une borne supérieure. D'après la question 8, si x était sup-irréductible, E^-x serait un singleton. Ainsi, x n'est pas sup-irréductible.
$\bullet$ Réciproquement, vérifions que si l'une de ces 3 conditions est vérifiée, alors x est sup-irréductible.
$\diamond$ Supposons d'abord que x est minimal dans E sans être le minimum de E.

Soit $X \subset E$ telle que X possède un sup avec $x = \sup(X)$.
$X \neq \emptyset$ (sinon, $x = \sup(\emptyset) = \min(E)$ ce qui est faux), donc il existe $y \in X$. Alors $y \leq x$, mais x est minimal, donc $x = y \in X$. Ceci prouve que x est sup-irréductible.
$\diamond$ Supposons que $E^{-}x$ est un singleton égal à $\{y\}$.
Soit $X \subset E$ telle que X possède un sup avec $x = \sup(X)$.
Supposons que $x \notin X$. Alors pour tout $z \in X$, $z < x$. Alors d'après la question 9, pour tout $z \in X$, $z \leq y$. Ainsi, y majore X, mais $y \in E^{-}x$, donc $y < x$. y est un majorant de X strictement inférieur à $x = \sup(X)$. C'est impossible, donc $x \in X$. Ainsi, x est sup-irréductible.
$\diamond$ On suppose enfin que $E^{-}x$ possède au moins deux éléments et que $E^{-}x$ ne possède pas de borne supérieure.
Soit $X \subset E$ telle que X possède un sup avec $x = \sup(X)$. Supposons que $x \notin X$.
D'après la question 10, il existe un majorant y de $E^{-}x$ non comparable avec x.
Soit $z \in X$. Alors $z < x$. Posons $K = \{a \in E \ / \ z \leq a < x\}$. Le raisonnement de la question 9 montre à nouveau qu'il existe un élément maximal dans K noté b et que $b \in E^{-}x$. Or y majore $E^{-}x$, donc $y \geq b$, mais $b \in K$, donc $b \geq z$. Ainsi, $y \geq z$. Ceci prouve que y est un majorant de X. Or $x = \sup X$, donc $x \leq y$, ce qui est faux car x et y ne sont pas comparables. Ceci démontre que x est sup-irréductible.

Partie II : Parties sup-génératrices

12°) Soit $x \in E$. Posons
$K = \{k \in \mathbb{N}^* \ / \ \exists\, x_1, \ldots, x_k \in E,\ \ \forall i \in \{1, \ldots, k-1\},\ \ x_i < x_{i+1},\ \text{et}\ x_k = x\}$.
K est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $1 \in K$ (en prenant $x_1 = x$) et K est majorée par le cardinal de E, donc K possède un maximum. On pose $h(x) = \max(K)$.

13°) Par hypothèse, il existe $X \subset E$ tel que X possède un sup avec $x = \sup(X)$ et $x \notin X$. Soit $y \in X$. Posons $k = h(y)$. Alors il existe $y_1, \ldots, y_k \in E$ tel que $y_1 < \cdots < y_k = y$. D'après les hypothèses, on a $y_1 < \cdots < y_k = y < x$, donc $h(x) \geq k + 1$. Ainsi, $h(x) > h(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

14°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $x \in E$ tel que $h(x) = n$, il existe $X \subset S(E)$ tel que X possède un sup et $x = \sup(X)$.
Initialisation : Soit $x \in E$ tel que $h(x) = 1$. Alors x est minimal (sinon il existerait $x_2 \in E$ tel que $x_2 < x$, donc $h(x) \geq 2$).
Si E admet un minimum avec $x = \min(E)$, alors on a déjà vu que $x = \sup(\emptyset)$ et on a bien que $\emptyset \subset S(E)$. Sinon, d'après le premier cas de la question 11, x est sup-irréductible, donc $x \in S(E)$. On a alors $x = \sup(\{x\})$ et $\{x\} \subset S(E)$.
Ainsi, on a montré $R(1)$.
Hérédité : on suppose que $n \geq 2$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $R(k)$ est vraie.
Soit $x \in E$ tel que $h(x) = n$.
Si x est sup-irréductible, alors on a encore $x = \sup(\{x\})$ et $\{x\} \subset S(E)$.
Supposons maintenant que x n'est pas sup-irréductible. D'après la question précédente, il existe $X \subset E$ tel que $x = \sup(X)$ et tel que, pour tout $y \in X$, $h(y) < h(x) = n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $y \in X$, il existe $X_y \subset S(E)$ tel que X_y possède une borne supérieure avec $y = \sup(X_y)$.
Ainsi, $X = \{\sup(X_y) \ / \ y \in X\}$. D'après la première question, $\bigcup_{y \in X} X_y$ possède une borne supérieure et $x = \sup\left(\bigcup_{y \in X} X_y\right)$, or pour tout $y \in X$, $X_y \subset S(E)$, donc $\bigcup_{y \in X} X_y \subset S(E)$.
Dans tous les cas, on a montré qu'il existe $A \subset S(E)$ tel que $x = \sup(A)$.
Ceci prouve $R(n)$.
D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R(n)$ est vraie, donc $S(E)$ est sup-génératrice.

15°) Par définition de $S_x(E)$, x majore $S_x(E)$.
D'après la question précédente, il existe $X \subset S(E)$ tel que
X admet un sup et $x = \sup(X)$.
Pour tout $z \in X$, $z \leq x$, donc $X \subset S_x(E)$.
Soit y un majorant de $S_x(E)$. Alors y majore X, donc $y \geq x$.
Ainsi, x est le plus petit des majorants de $S_x(E)$, donc $S_x(E)$ possède un sup et $x = \sup(S_x(E))$.

16°) Soit G une partie sup-génératrice de E. Soit $x \in S(E)$. Il existe $X \subset G$ tel que X possède un sup avec $x = \sup(X)$. Mais x est sup-irréductible, donc $x \in X$. Ainsi, $x \in G$. On a bien montré que $S(E) \subset G$.
Réciproquement, Supposons que $S(E) \subset G$. Soit $x \in E$. On a vu que $x = \sup(S_x(E))$, or $S_x(E) \subset G$, donc G est sup-génératrice.

Problème 2 : Le postulat de Bertrand

Partie I : majoration du produit des premiers nombres premiers

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$. Alors
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$, donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2°) Selon la formule du binôme de Newton,
$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k},$$
donc $4^m \times 2 = 2^{2m+1} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}$,
or $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{(2m+1)-m} = \binom{2m+1}{m+1}$, donc $4^m \times 2 \geq 2\binom{2m+1}{m+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leq 2m+1$.
Alors p divise $\prod_{k=m+2}^{2m+1} k = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = m!\binom{2m+1}{m+1}$, or p est premier avec $m!$, donc d'après le théorème de Gauss, p divise $\binom{2m+1}{m+1}$, pour tout $p \in \mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leq 2m+1$, donc d'après le cours d'arithmétique, $\prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ m+1<p\leq 2m+1}} p$ divise le coefficient binomial $\binom{2m+1}{m+1}$.

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ la propriété $\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p \leq 4^n$.

Pour $n = 1$, $\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p = 1$, car c'est un produit vide, d'où $R(1)$.

Pour $n = 2$, $\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p = 2 \leq 16 = 4^2$, donc $R(2)$ est vraie.

Supposons que $n \geq 2$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $R(k)$ est vrai.
Si $n+1$ est pair, $n+1$ étant différent de 2, il n'est pas premier,
donc $\prod_{p\in\mathbb{P}_{n+1}} p = \prod_{p\in\mathbb{P}_n} p \leq 4^n \leq 4^{n+1}$.
Supposons maintenant que $n+1$ est impair. $n+1 \geq 3$, donc il existe $m \geq 1$ tel que $n+1 = 2m+1$. Alors $\prod_{p\in\mathbb{P}_{n+1}} p = \Big(\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[0,m+1]} p\Big) \times \Big(\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[m+2,2m+1]} p\Big)$.
$m \geq 1$, donc $m+1 \leq 2m = n$.
Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{p\in\mathbb{P}\cap[0,m+1]} p \leq 4^{m+1}$.

De plus, d'après la question 3, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p = k \binom{2m+1}{m+1}$, or $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p$ et $\displaystyle\binom{2m+1}{m+1}$ sont dans $\mathbb{N}^*$, donc $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \leq \binom{2m+1}{m+1}$, puis d'après la première question, que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \leq 4^m$.
Ainsi, en combinant ces différentes inégalités, on obtient $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p \quad \leq 4^{m+1} \times 4^m = 4^{n+1}$, ce qui démontre $R(n+1)$.
Le principe de récurrence forte permet de conclure.

Partie II : une formule de Legendre

5°) Soit $k \in \mathbb{N}$. n et p sont strictement positifs et $p \geq 2$, donc $\ln(p) > 0$. Ainsi, $n < p^k \iff \ln(n) < k \ln(p) \iff \dfrac{\ln n}{\ln p} < k \iff \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor < k$, donc si l'on pose $m = \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$, on a montré que $\{k \in \mathbb{N} \ / \ n < p^k\} = [m+1, +\infty[\cap \mathbb{N}$.
Ainsi, $\{k \in \mathbb{N} \ / \ n < p^k\}$ possède bien un minimum, il est égal à $\boxed{\left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + 1}$.

6°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons U_k l'ensemble des entiers compris entre 1 et n qui sont multiples de p^k.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{N}_n$. Alors $v_p(a) = k$ si et seulement si a est un multiple de p^k sans être un multiple de p^{k+1}, donc $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$. Or $U_{k+1} \subset U_k$, donc $|\Omega_k| = |U_k| - |U_{k+1}|$.
D'autre part, $U_k = \{bp^k \ / b \in \mathbb{N} \text{ et } \ 1 \leq bp^k \leq n\}$ et, pour tout $b \in \mathbb{N}$, $1 \leq bp^k \leq n \iff 1 \leq b \leq \dfrac{n}{p^k} \iff 1 \leq b \leq \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$, donc $|U_k| = \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$.
En conclusion, $|\Omega_k| = \left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$.
On remarquera que, d'après la question précédente, en posant $k_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor + 1$, pour tout $k \geq k_0$, Ω_k est vide.

7°) $\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.
En effet, $ab = \left(\displaystyle\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{v_q(a)}\right) \times \left(\displaystyle\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{v_q(b)}\right)$, tous ces produits étant constitués d'un nombre fini de facteurs différents de 1, donc $ab = \displaystyle\prod_{q \in \mathbb{P}} q^{v_q(a)+v_q(b)}$ et on conclut en utilisant l'unicité de la décomposition de ab en produit de nombres premiers.
$\diamond$ Or $n! = \displaystyle\prod_{1 \leq k \leq n} k$, donc $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_p(k)$.
De plus la famille $(\Omega_h)_{0 \leq h \leq k_0 - 1}$ forme une partition de $\{1, \ldots, n\}$,

donc $v_p(n!) = \sum_{h=0}^{k_0-1} \sum_{k\in\Omega_h} v_p(k) = \sum_{h=0}^{k_0-1} h|\Omega_h|$.

$\diamond$ D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(k\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - k\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \left(k\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - (k+1)\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) + \sum_{k=0}^{k_0-1} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \\ &= 0 - 0 + \sum_{k\geq 0} \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \text{ (par téléscopage)} \\ &= \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \end{aligned}$$

Partie III : diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$

8°) p divise $(n!)a_n = (2n)(2n-1)\cdots(n+1)$, or p est premier, donc p divise l'un des facteurs $n+1$, $n+2, \ldots$, $2n$. Ceci implique que $p \leq 2n$.
De plus, on a supposé qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n+1$ et $2n$, donc $p \leq n$.

9°) Supposons que $p > \frac{2n}{3}$. Ainsi, $\frac{2n}{3} < p \leq n$.
Alors $n < \frac{4n}{3} < 2p \leq 2n$ et $2n < 3p$, donc les seuls multiples de p entre 1 et $2n$ sont p et $2p$, avec $2p > n$. On en déduit que $v_p((2n)!) = 2$ et $v_p(n!) = 1$.
Or $(2n)! = a_n(n!)^2$, donc $v_p((2n)!) = v_p(a_n) + 2v_p(n!)$. Ainsi $v_p(a_n) = 0$, ce qui est faux car p divise a_n. Ainsi, on a bien montré que $p \leq \frac{2n}{3}$.

10°) $\diamond$ On vient de voir que $v_p(a_n) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!)$, or d'après la formule de Legendre, pour tout $N \geq \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$, $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$,

donc on a bien $v_p(a_n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
En effet, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$ et $2(x-1) < 2\lfloor x \rfloor \leq 2x$,
donc $(2x-1) - 2x < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2x - 2(x-1)$, puis $-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$, ce qui conclut car $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$.

$\diamond$ Ainsi, pour tout $k \in \{1, \ldots, \lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor\}$, $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \in \{0, 1\}$, donc $v_p(a_n) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} 1 = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$.

11°) $\diamond$ On suppose que $p > \sqrt{2n}$.
Alors $\dfrac{\ln(2n)}{\ln p} < \dfrac{\ln(2n)}{\frac{1}{2}\ln(2n)} = 2$, donc $v_p(a_n) \leq \left\lfloor \dfrac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor \leq 1$.
$\diamond$ $v_p(a_n) \leq \dfrac{\ln(2n)}{\ln p}$, donc $p^{v_p(an)} = e^{v_p(a_n)\ln p} \leq e^{\ln(2n)} = 2n$.

Partie IV : démonstration du postulat de Bertrand

12°) D'après la question 9, $a_n = \displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \frac{2n}{3}]} p^{v_p(a_n)}$, puis d'après la question précédente,
$a_n \leq \displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]} p^{v_p(a_n)} \prod_{p \in \mathbb{P} \cap]\sqrt{2n}, \frac{2n}{3}]} p$, or toujours d'après la question précédente,
$\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]} p^{v_p(a_n)} \leq \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]} (2n) \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}$, car le cardinal de $\mathbb{P} \cap [2, \sqrt{2n}]$ est inférieur à $\sqrt{2n} - 1$.
De plus, d'après la question 4, $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap]\sqrt{2n}, \frac{2n}{3}]} p \leq \prod_{p \in \mathbb{P}_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}} p \leq 4^{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \leq 4^{\frac{2n}{3}}$.
On en déduit que $a_n \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$.

13°) Soit $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$.
On calcule $\dfrac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \dfrac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} \times \dfrac{k!(2n-k)!}{(2n)!} = \dfrac{2n-k}{k+1}$,
donc $\binom{2n}{k+1} \geq \binom{2n}{k} \iff \dfrac{2n-k}{k+1} \geq 1 \iff 2n-k \geq k+1 \iff 2k \leq 2n-1$.
Ainsi, $\binom{2n}{k+1} \geq \binom{2n}{k} \iff k \leq n-1$. Ceci démontre que la suite $\left(\binom{2n}{k}\right)_{0 \leq k \leq 2n}$ est croissante lorsque k varie de 0 à n, puis est décroissante lorsque k varie de n à $2n$.
En particulier, cette suite atteint son maximum lorsque $k = n$,
donc pour tout $k \in \{1, \ldots, 2n\}$, $a_n \geq \binom{2n}{k}$.

14°) D'après la formule du binôme de Newton,
$4^n = (1+1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1)a_n$,
d'après la question précédente. Or

$a_n = \dfrac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = 2\dfrac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{(n-1)!} = 2\dbinom{2n-1}{n-1} \geq 2,$
donc $2 - a_n \leq 0$ puis $4^n \leq 2na_n$, ce qui montre que $a_n \geq \dfrac{4^n}{2n}$.

15°) En combinant les questions 12 et 14, on obtient que $\dfrac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}4^{\frac{2n}{3}}$, donc $4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$, puis en passant au logarithme, $\dfrac{n}{3}\ln 4 \leq \sqrt{2n}\ln(2n)$.
En divisant par $2n > 0$, on obtient $\dfrac{\ln(\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} \geq \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln 4}{6} = \dfrac{\ln 2}{6}$.

16°) $\diamond$ $\dfrac{\ln 2}{6} \geq \dfrac{\ln(32)}{32} \Longleftrightarrow 32\ln 2 \geq 6\ln(2^5) \Longleftrightarrow 32 \geq 6 \times 5$. La dernière propriété est vraie, donc $\dfrac{\ln 2}{6} \geq \dfrac{\ln(32)}{32}$.
$\diamond$ Pour tout $x \in]e, +\infty[$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est dérivable et, pour tout $x \in]e, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x} < 0$, donc f est strictement décroissante.
$\sqrt{2n} > e \Longleftrightarrow n \geq \frac{e^2}{2} \Longleftrightarrow n \geq 4$ (d'après l'énoncé). Or on a supposé qu'aucun nombre premier n'existe entre $n+1$ et $2n$, donc $n \notin \{1, 2, 3\}$. Ainsi, $n \geq 4$, donc $\sqrt{2n} \in]e, +\infty[$ et $32 \in]e, +\infty[$. Or $\dfrac{\ln(\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} \geq \dfrac{\ln(32)}{32}$ et f est strictement décroissante, donc $\sqrt{2n} \leq 32$.
On en déduit que $n \leq \frac{1}{2}(32)^2 = 512$.
$\diamond$ Il reste à vérifier à la main ou avec un ordinateur, que pour tout entier k compris entre 4 et 512, on peut toujours trouver un nombre premier entre $k+1$ et $2k$. C'est contraire à l'hypothèse portant sur n en début de partie III. On obtient une contradiction, donc il existe donc bien un nombre premier compris entre $n+1$ et $2n$.