Résumé de cours :
Semaine 9, du 12 au 15 novembre.

1 Lois internes

Définition. Une loi interne sur E est une application f de $E \times E$ dans E. Dans ce contexte la notation *préfixe* "$f(x, y)$" est remplacée par la notation *infixe* "$x\ f\ y$", où $x, y \in E$.
On dit que (E, f) est un magma (hors programme).

Définition. Soit Δ une loi interne sur E. Δ est associative si et seulement si pour tout $x, y, z \in E$, $(x\ \Delta\ y)\ \Delta\ z = x\ \Delta\ (y\ \Delta\ z)$. On dit alors que (E, Δ) est un magma associatif. Dans ce cas, si $x_1, \ldots, x_p \in E$, la quantité $x_1\ \Delta\ x_2\ \Delta\ \cdots\ \Delta\ x_p$ ne dépend pas des différentes façons de la parenthéser.

Définition. Soit Δ une loi interne sur E et soit $e \in E$. On dit que e est un élément neutre de (E, Δ) si et seulement si, pour tout $x \in E$, $x\ \Delta\ e = e\ \Delta\ x = x$. Si E possède un élément neutre, il est unique. On dit alors que (E, Δ) est un magma unitaire, ou bien unifère.

Définition. Un monoïde est un magma associatif unitaire. Il est commutatif, ou abélien, si et seulement si pour tout x, y, $x\ \Delta\ y = y\ \Delta\ x$.

Remarque. l'usage est de confondre le monoïde (E, Δ) et l'ensemble sous-jacent E.

Notation. Si (E, Δ) est un monoïde d'élément neutre e, on convient que
$x_1\ \Delta\ x_2\ \Delta\ \cdots\ \Delta\ x_p = e$, lorsque $p = 0$.

Définition. Soit $(E, \times)$ un monoïde d'élément neutre 1_E et $x \in E$. On dit que x est inversible à droite (resp : à gauche) si et seulement si il existe $y \in E$ tel que $yx = 1_E$ (resp : $xy = 1_E$).
Si x est inversible à gauche et à droite, il existe un unique $y \in E$ tel que $xy = yx = 1_E$. On note $y = x^{-1}$, c'est le symétrique de x.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété.
Si x et y sont inversibles dans le monoïde $(E, \times)$, alors xy est aussi inversible et $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Définition. Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

Définition. On appelle ***anneau*** tout triplet $(A, +, .)$, où A est un ensemble et où "+" et "." sont deux lois internes sur A telles que

- $(A, +)$ est un groupe abélien (l'élément neutre étant noté 0 ou 0_A),
- "." est une loi associative, admettant un élément neutre noté 1 ou 1_A,
- la loi "." est ***distributive*** par rapport à la loi "+", c'est-à-dire que
$\forall (x, y, z) \in A^3\ \ x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$ et $(x + y).z = (x.z) + (y.z)$.

2 Définition du cardinal d'un ensemble

Définition. Soit E un ensemble. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N}_n$ est en bijection avec E, alors n est unique. On dit que n est le cardinal de E. Il est noté $\text{card}(E)$ ou bien $\#E$, ou encore $|E|$.
En cas d'inexistence d'un tel entier n, on dit que E est infini.

Exemple. Pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$, $\text{Card}([\![n, m]\!]) = m - n + 1$.

Propriété. Soit A un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit B un ensemble quelconque.
B est fini de cardinal n si et seulement si il existe une bijection de A sur B.

Propriété. Soit A un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de A.
Alors B est un ensemble fini et $|B| \leq |A|$, avec égalité si et seulement si $B = A$.

Propriété. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. A est finie si et seulement si elle est majorée.
En particulier, $\mathbb{N}$ est infini.

3 Cardinaux d'ensembles usuels

Propriété. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une réunion *disjointe* de n ensembles finis est finie et son cardinal est égal à la somme des cardinaux de ces ensembles.

Propriété. Soit E un ensemble fini et A une partie de E. Alors $|E \setminus A| = |E| - |A|$.

Propriété. Soit E un ensemble fini et R une relation d'équivalence sur E.
Alors E/R est aussi de cardinal fini, inférieur au cardinal de E.

Formule :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. **Formule du crible :** (Hors programme)

$$\begin{aligned}\#\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \#E_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(E_i \cap E_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\Big) \\ &+ \cdots + (-1)^{n+1} \#\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\Big).\end{aligned}$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Le cardinal du produit cartésien de n ensembles finis est égal au produit des cardinaux de ces ensembles.
Il faut savoir le démontrer.

Formule : $|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est de cardinal n, alors $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n.
Il faut savoir le démontrer.

4 Sommes et produits finis

Formules :

- Pour tout $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} a = na$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$, que l'on appelle des permutations sur $\mathbb{N}_n$.

Commutativité généralisée : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in G$. Alors, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$.

Définition. Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille de G indexée par A.

Notons $n = |A|$. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ dans A. On pose $\sum_{a \in A} x_a \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$.

Cette quantité ne dépend pas de la bijection f.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété d'additivité : Soit A un ensemble fini, $(x_a)_{a \in A}$ et $(y_a)_{a \in A}$ deux familles d'éléments de G indexées par A. Alors $\sum_{a \in A} (x_a + y_a) = \left(\sum_{a \in A} x_a\right) + \left(\sum_{a \in A} y_a\right)$.

Distributivité généralisée : Soit A un ensemble fini, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(x_a)_{a \in A}$une famille de *complexes* indexée par A. Alors $\sum_{a \in A} (\lambda x_a) = \lambda \sum_{a \in A} x_a$.

Changement de variable dans une somme finie : Soit B un ensemble fini, $(x_b)_{b \in B}$ une famille d'éléments de G. Soit φ une bijection d'un ensemble A dans B. Alors $\sum_{b \in B} x_b = \sum_{a \in A} x_{\varphi(a)}$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule : calcul d'une somme géométrique .

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Alors $\sum_{k=m}^{n} q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1 - q}$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Alors, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Ce théorème est encore vrai lorsque G n'est pas commutatif (cf plus loin).

Sommation par paquets : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille d'éléments de G. On suppose qu'il existe un ensemble fini B et une famille $(A_b)_{b \in B}$ de parties de A telles que $A = \bigsqcup_{b \in B} A_b$.

Alors $\sum_{a \in A} x_a = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A_b} x_a$.

Sommation par paquets, seconde formulation : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a \in A}$ une famille d'éléments de G. Soit R une relation d'équivalence sur A. Alors $\sum_{a \in A} x_a = \sum_{c \in A/R} \sum_{a \in c} x_a$.

5 Applications et cardinaux

Notation. Considérons une application f de E dans F, où E est de cardinal fini.

Propriété. Soit E un ensemble fini et f une application de E dans un ensemble quelconque F. Alors $f(E)$ est fini. De plus,
$|f(E)| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si f est injective, et
$|f(E)| \leq |F|$, avec égalité si et seulement si f est surjective.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit E et F deux ensembles finis *de même cardinal*. Soit f une application de E dans F. Alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective .

Propriété. Soit A et B deux ensembles.
S'il existe une injection de A dans B et si B est fini, alors A est fini et $|A| \leq |B|$.
S'il existe une surjection de A dans B et si A est fini, alors B est fini et $|A| \geq |B|$.

Principe des tiroirs : Si l'on doit ranger p objets dans n tiroirs et que $p > n$, alors il existe au moins 2 objets qui seront dans le même tiroir.
Plus généralement, si $p > cn$, où $c \in \mathbb{N}^*$, il existe un tiroir qui contient plus de $c + 1$ objets.
Il faut savoir le démontrer.

Principe des bergers : Soit E et F des ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose que tout élément de F possède exactement k antécédents par f. Alors $|E| = k|F|$.
Il faut savoir le démontrer.

6 Ensembles dénombrables

Définition. Un ensemble est dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Propriété. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Propriété. On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.
Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Lemme technique : Un ensemble I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
Dans ce cas, on dira que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

Corollaire. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
Il faut savoir le démontrer.

> **Exercice.** Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
> *Solution.* À connaître.