Feuille d'exercices 8: Dénombrement, ensembles dénombrables, sommes finies.

Exercice 8.1 : (niveau 1) Les dominos sont des pièces rectangulaires sur lesquelles figurent, sur une de leurs faces, deux ensembles de points séparés par un trait. Chaque ensemble contient entre 0 et 6 points. Une boîte de dominos contient tous les dominos différents qu'il est possible de constituer. Combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?

Exercice 8.2 : (niveau 1) Vérifier que $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$, puis calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8.3 : (niveau 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Dénombrer les bijections f, de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même, qui respectent la parité, c'est-à-dire telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, k pair $\iff f(k)$ pair.

2°) Dénombrer les applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même, qui respectent la parité.

Exercice 8.4 : (niveau 1) On suppose que I et J sont deux ensembles.
S'il existe une application injective de I dans J et si J est fini ou dénombrable, montrer que I est fini ou dénombrable.
S'il existe une application surjective de I dans J et si I est fini ou dénombrable, montrer que J est fini ou dénombrable.

Exercice 8.5 : (niveau 1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} b^{-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}$.

Exercice 8.6 : (niveau 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 8.7 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 8.8 : (niveau 2) Combien de mains de 13 cartes peut-on constituer dans un jeu de 52 cartes telles que :

1°) Elles contiennent exactement un roi ?

2°) Elles contiennent au plus un roi ?

3°) elles contiennent le roi de trèfle et au moins 2 piques ?

4°) elles contiennent 5 cartes d'une couleur, 4 cartes d'une autre et 4 cartes d'une troisième ?

Exercice 8.9 : (niveau 2) Pour le 14 juillet, un artificier s'occupe d'un feu d'artifice composé de 8 blocs comportant chacun quatre fusées. Le pupitre de commande de mise à feu possède 32 boutons, correspondant chacun à une fusée. L'artificier appuie simultanément et au hasard sur 5 boutons.

1°) Dénombrer tous les cas possibles.

2°) Dénombrer tous les cas où les 5 fusées partent de 5 blocs différents.

3°) Dénombrer tous les cas où 3 fusées partent d'un même bloc et les deux autres d'un même bloc, différent du précédent.

4°) Dénombrer tous les cas où 2 fusées partent d'un même bloc, 1 d'un autre bloc et 2 d'un autre encore.

Exercice 8.10 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \cos^n \left(\frac{p\pi}{n}\right)$.

Exercice 8.11 : (niveau 2) Soit E un ensemble infini, c'est-à-dire un ensemble qui n'est en bijection avec aucun des ensembles $\mathbb{N}_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

1°) Montrer qu'il existe une application injective de $\mathbb{N}$ dans E.

2°) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe une bijection de $E \setminus \{x\}$ dans E.

Exercice 8.12 : (niveau 2)

Soit E un ensemble fini et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on pose $F(A) = \displaystyle\sum_{B \in \mathcal{P}(A)} f(B)$.

Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(A) = \displaystyle\sum_{B \in \mathcal{P}(A)} (-1)^{|A \setminus B|} F(B)$.

Exercice 8.13 : (niveau 2) Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.

2°) Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

3°) Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $E = A \sqcup B \sqcup C$.

Exercice 8.14 : (niveau 2) Soit (x_n) et (y_n) deux suites de réels telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_k$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x_k$.

Exercice 8.15 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $k \mid n$, on pose $A_k = \{m \in \mathbb{N}_n \ / \ k \mid m\}$.
Lorsque $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_n$ sont r diviseurs de n deux à deux premiers entre eux, déterminer le cardinal de $A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_r}$.

2°) On note $\varphi(n)$ le nombre d'entier $h \in \mathbb{N}_n$ tel que $h \wedge n = 1$: c'est l'indicatrice d'Euler. Déduire de la question précédente que $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid n}} (1 - \frac{1}{p})$.

Exercice 8.16 : (niveau 2)

Montrer par une méthode combinatoire que $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$.

Exercice 8.17 : (niveau 3) On note $E = \{n^k \ / \ n, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2\}$. Montrer que $\frac{|E \cap \{1, \ldots, N\}|}{\sqrt{N}} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, où $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A.

Exercice 8.18 : (niveau 3) Fournir une preuve combinatoire de l'identité de Vandermonde :

$$\text{pour tout } n, N, M \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} \times \binom{M}{n-k} = \binom{N+M}{n},$$

en convenant que $\binom{a}{b}$ est nul dès que $\neg[0 \leq b \leq a]$.
Formaliser cette preuve en une preuve rigoureuse si ce n'est déjà fait.
En déduire une formule plus générale.

Exercice 8.19 : (niveau 3) On note $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ où n est un entier naturel fixé non nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A_{n,k} = \{f \ : \ \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N} / \sum_{1 \leq x \leq n} f(x) \leq k\}$

et $B_{n,k} = \{f \ : \ \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N} / \sum_{1 \leq x \leq n} f(x) = k\}$.

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,k} = card(A_{n,k})$ et $b_{n,k} = card(B_{n,k})$.

1°) Montrez que pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$b_{n,k} = a_{n-1,k} \quad \text{et } a_{n,k} = b_{n,k} + a_{n,k-1}.$$

2°) En déduire que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$a_{n,k} = C_{n+k}^{k} \quad \text{et } b_{n,k} = C_{n+k-1}^{k}.$$

3°) Donner une preuve combinatoire de ces formules.

Exercice 8.20 : (niveau 3) Soit A une partie de $\{1,\dots,n\}$ telle que, pour tout $(x,y,z)\in A^3$, $x+y\neq z$.
Majorer le cardinal de A. Cette majoration est-elle optimale ?

Exercice 8.21 : (niveau 3) Soit $p\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}$ et E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le nombre d'applications croissantes de $\{1,\dots,p\}$ dans $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 8.22 : (niveau 3) Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1°) L'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})$ des parties dénombrables de $\mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$.

2°) L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites entières.
L'ensemble $A\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
L'ensemble $B\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites stationnaires à partir d'un certain rang.

3°) L'ensemble $\sigma(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
L'ensemble $\sigma_0(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même coïncidant avec l'identité en dehors d'un ensemble fini.

Exercice 8.23 : (niveau 3)

1°) Donner une preuve combinatoire de la formule

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k}=\binom{n+p+1}{n+1},\ \text{où } p,n\in\mathbb{N}.$$

2°) Donner une preuve combinatoire de la formule

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{N}\binom{n-k}{M}=\binom{n+1}{N+M+1},$$

où $M,N,n\in\mathbb{N}$, en convenant que $\binom{b}{a}=0$ dès que $\neg[0\leq a\leq b]$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8.24 : (niveau 1)

Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Exercice 8.25 : (niveau 1)

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. Montrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ [p]$.

Exercice 8.26 : (niveau 1)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de suites strictement croissantes constituées de p nombres de l'intervalle $[\![1;n]\!]$?

Exercice 8.27 : (niveau 1)

Calculez le nombre de lois internes commutatives sur un ensemble de cardinal n.

Exercice 8.28 : (niveau 1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$ et $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$.

Exercice 8.29 : (niveau 2)

On considère un rectangle de dimension $n \times 2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A(n)$ le nombre de façons de recouvrir sans chevauchement ce rectangle à l'aide de rectangles élémentaires de dimension 1×2, appelés des pièces. Déterminer $A(n)$.

Exercice 8.30 : (niveau 2)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{(2^k)})$.

Exprimer u_n en fonction de n puis calculer la limite de u_n.

Exercice 8.31 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une grenouille grimpe un escalier de n marches. À chaque bond, elle peut sauter ou bien de la marche k à la marche $k+1$ ou bien de la marche k à la marche $k+2$. On note u_n le nombre de façons différentes pour la grenouille de grimper l'escalier. On convient que $u_0 = 1$.

1°) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

2°) Indépendamment de la première question, justifier que,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$.

Préciser ce que représente cette somme dans le triangle de Pascal et retrouver ainsi le résultat de la première question.

Exercice 8.32 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ et $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

2°) a) Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_n + 1}$.

Exercice 8.33 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{2k}{n}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{2k+1}{n}$.

2°) Calculer $\displaystyle\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{3k}{n}$.

Exercice 8.34 : (niveau 2)

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{A,B \subset E} |A \cap B|$.

Exercice 8.35 : (niveau 2)

Un triomino est une pièce triangulaire comportant un chiffre compris entre 0 et 5 à chacun de ses sommets. Combien existe-t-il de triominos différents ?

Exercice 8.36 : (niveau 2)

Combien y a-t-il de parties de $\mathbb{N}_n$ de cardinal k, où k est fixé entre 1 et n, ne contenant pas deux éléments consécutifs ?

Exercice 8.37 : (niveau 2)

Formule du crible :

1°) Si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles finis, montrer que

$$\begin{aligned}\#\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \#E_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(E_i \cap E_j) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\Big) \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} \#\Big(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\Big).\end{aligned}$$

2°) Une soirée dansante réunit n couples mariés (hétérosexuels). Chaque homme invite au hasard une femme masquée. Quelle est la probabilité qu'aucun mari ne danse avec sa femme ?

Exercice 8.38 : (niveau 2)

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$.
Donner le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^k$ de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.

Exercice 8.39 : (niveau 2)

On définit l'opérateur de dérivation discrète $\begin{array}{cccc} T : & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$,
où pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}$.
Pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $T^n(f)(x)$.

Exercice 8.40 : (niveau 2)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ est impair.

Exercice 8.41 : (niveau 2)

Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si, pour tout $f : E \longrightarrow E$, il existe $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$, $A \neq E$ et $f(A) \subset A$.

Exercice 8.42 : (niveau 2)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions différentes (on considèrera que deux configurations qui diffèrent par une rotation sont différentes) :

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

Exercice 8.43 : (niveau 3)

Calculez $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$ et $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$.
Proposez une formule plus générale puis démontrez-la, d'une part par le calcul, d'autre part de manière combinatoire (i.e : en utilisant un argument de dénombrement).

Exercice 8.44 : (niveau 3)

1°) Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} / \forall i \in \mathbb{N} \;\; x_i \in \{0,1\}\}$ n'est pas dénombrable.

2°) Montrer que l'ensemble des involutions sur $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 8.45 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Lorsque $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^n$, on convient de noter $x \leq_n y$ si et seulement si $\forall i \in \mathbb{N}_n, \;\; x_i \leq y_i$.
Montrer que $\leq_n$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^n$.

2°) Soit A une partie de $\mathbb{N}^n$. On suppose que, pour tout $x, y \in A$ avec $x \neq y$, x et y ne sont pas comparables avec $\leq_n$. Montrer que A est finie.

Exercice 8.46 : (niveau 3)

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$. Simplifier l'expression

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n} \in \{-1,1\}^n} \cos\Big(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\Big).$$

2°) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^{n} \cos(kx)\, dx = 0$.

Exercice 8.47 : (niveau 3)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{(2m)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}$.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\Big|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}\Big| \leq 2\sqrt{n}$.

Exercice 8.48 : (niveau 3)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

Exercice 8.49 : (niveau 3)

Soit E un ensemble infini et F un sous-ensemble de E, infini dénombrable, tel que $E \setminus F$ est infini. Montrer qu'il existe une bijection de E sur $E \setminus F$.

Exercice 8.50 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A un sous ensemble de $[\![1, 2n]\!]$ contenant $n+1$ éléments. Montrer qu'il existe $p, q \in A$ tel que $p \neq q$ et p divise q.

Exercice 8.51 : (niveau 3)

On choisit 19 nombres différents dans la suite arithmétique 1, 4, 7, 10, ..., 100. Démontrer que deux de ces nombres ont une somme égale à 104.

Exercice 8.52 : (niveau 3)

Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 1$.

1°) Calculer $\displaystyle\sum_{X\subset E} \mathrm{Card}(X)$.

2°) a) Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties disjointes de E.
b) Calculer $\displaystyle\sum_{X,Y\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X \cap Y)$.

Exercice 8.53 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que la moyenne des minimums des parties de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal r est égale à $\dfrac{n+1}{r+1}$.