# DM 16. Un corrigé

## Exercice

**1°)** Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la formule du binôme de Newton,
$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} e^{2ikp\frac{\pi}{n}}$, puis en intervertissant les deux sommes,
$S_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \Big( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{p} z^{n-p} e^{2ikp\frac{\pi}{n}} \Big)$.

**2°)** $S_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} \sum_{k=0}^{n-1} \Big( e^{2ip\frac{\pi}{n}} \Big)^k$.
Soit $p \in \{0, \ldots, n\}$. $e^{2ip\frac{\pi}{n}} = 1 \iff 2p\frac{\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi] \iff \frac{p}{n} \equiv 0\ [1] \iff n \mid p$. Ainsi, lorsque $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, $e^{2ip\frac{\pi}{n}} \neq 1$ et d'après le cours, $\sum_{k=0}^{n-1} \Big( e^{2ip\frac{\pi}{n}} \Big)^k = \dfrac{1 - e^{2ip\frac{\pi}{n}n}}{1 - e^{2ip\frac{\pi}{n}}} = 0$.
Et lorsque $p \in \{0, n\}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \Big( e^{2ip\frac{\pi}{n}} \Big)^k = n$, donc $S_n(z) = n(z^n + 1)$.

**3°)** Soit $a \in \mathbb{R}$. Appliquons la formule précédente lorsque $z = e^{2ia}$ :
$n(e^{2ina} + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big( e^{2ia} + e^{2ik\frac{\pi}{n}} \Big)^n$, donc en utilisant la technique de l'angle moyen,
$ne^{ina} 2\cos(na) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+k\frac{\pi}{n})n} 2^n \cos^n(a - k\dfrac{\pi}{n})$, puis en divisant par $e^{ina}2^n$,
$\dfrac{n\cos(na)}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n(a - k\dfrac{\pi}{n})$.

**4°)** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$,
donc $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin^n(\dfrac{k\pi}{n} - a) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n(\dfrac{k\pi}{n} - a - \dfrac{\pi}{2})$, puis d'après la question précédente, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin^n(\dfrac{k\pi}{n} - a) = \dfrac{n\cos(n(a + \frac{\pi}{2}))}{2^{n-1}}$.

## Problème 1 : Une formule entre intégrales

### Préliminaires

**1°)** $f'$ est strictement positive, donc $f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.
Soit $x, y \in [a, b]$ tels que $x \neq y$. Alors $x < y$ ou $y < x$, donc $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$, donc $f$ est injective.
Pour tout $t \in [a, b]$, $a \leq t \leq b$, donc $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$. Ainsi, $f$ est une application de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.
Soit $y \in [f(a), f(b)]$. $f$ étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $t \in [a, b]$ tel que $y = f(t)$. Ainsi, $f$ est surjective, donc $f$ réalise une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.

**2°)** Pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

### Partie I : étude d'un exemple

**3°)** D'après le cours, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = px^{p-1} > 0$, donc $f$ satisfait bien les hypothèses des préliminaires.

**4°)** $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \Big[\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big]_a^b = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$.

$\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt = \int_{f(a)}^{f(b)} t^{\frac{1}{p}}\, dt = \Big[\frac{t^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}\Big]_{a^p}^{b^p} = \frac{p}{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1})$,

donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt = b^{p+1} - a^{p+1} = bf(b) - af(a)$.

### Partie II : Deux preuves de la formule (1)

**5°)** $f^{-1}$ est dérivable, donc continue. Il existe donc une primitive de $f^{-1}$ que nous noterons $G$. Alors $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = G(f(x)) - G(f(a))$.
Ainsi cette expression est dérivable par rapport à $x$ et
$\displaystyle\frac{d}{dx}\Big(\int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt\Big) = f'(x)G'(f(x)) = f'(x)f^{-1}(f(x)) = xf'(x)$.
On en déduit que $\varphi$ est dérivable avec $\varphi'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) - xf'(x) = 0$.
$\varphi$ est donc constante sur l'intervalle $[a, b]$. En particulier, $\varphi(a) = \varphi(b)$, c'est-à-dire $\displaystyle -af(a) = \int_a^b f(t)\, dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt - bf(b)$, ce qu'il fallait démontrer.

**6°)** Posons $t = f(u)$, ce qui est possible car $f$ est supposée de classe $C^1$. Alors
$\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\, dt = \int_a^b f^{-1}(f(u))f'(u)\, du = \int_a^b uf'(u)\, du$.

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\ dt = \int_a^b (f(t)+tf'(t))\ dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(tf(t))\ dt$,
or $t \longmapsto tf(t)$ est de classe $C^1$, donc d'après le cours,
$\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\ dt = \Big[tf(t)\Big]_a^b = bf(b) - af(a)$.

## Partie III : Utilisation de la formule (1)

**7°)** $f$ est bien de classe $C^1$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x \in [a,b]$,
$f'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}} > 0$, donc $f$ vérifie les hypothèses des préliminaires. On peut ainsi appliquer la formule (1) avec $f$.
De plus, pour tout $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = y \Longleftrightarrow \tan x = y^2 \Longleftrightarrow x = \arctan(y^2)$, donc pour tout $t \in [f(a), f(b)]$, $f^{-1}(t) = \arctan(t^2)$. Ainsi, pour tout $a \in ]0, \frac{\pi}{4}[$, en prenant $b = \frac{\pi}{4}$, la formule (1) devient
(2) : $\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\ dt + \int_{\sqrt{\tan a}}^1 \arctan(t^2)\ dt = \frac{\pi}{4} - a\sqrt{\tan a}$.
L'application $x \longmapsto \sqrt{\tan x}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, donc d'après le cours, l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\ dt$ est de classe $C^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. A fortiori elle est continue, donc
$\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\ dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\ dt$.
Pour les mêmes raisons, $\displaystyle\int_\alpha^1 \arctan(t^2)\ dt \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 \arctan(t^2)\ dt$,
puis par composition des limites, $\displaystyle\int_{\sqrt{\tan a}}^1 \arctan(t^2)\ dt \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 \arctan(t^2)\ dt$. Ainsi, en faisant tendre $a$ vers 0 dans la formule (2), on obtient
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\ dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(t^2)\ dt$.

**8°)** En intégrant par parties,
$\displaystyle\int_0^1 \arctan(t^2)\ dt = [t\ \arctan(t^2)]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{2t}{1+t^4}\ dt = \frac{\pi}{4} - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\ dt$,
donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan t}\ dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\ dt$.

**9°)** Notons $(C)$ la condition $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{t^2}{1+t^4} = \dfrac{u_1 t + u_2}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \dfrac{u_3 t + u_4}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}$.
$(t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) = t^4 + 1$, donc

$$\begin{aligned}(C) \iff \forall t \in \mathbb{R},\ t^2 = &\ (u_1 t + u_2)(t^2 - \sqrt{2}t + 1) + (u_3 t + u_4)(t^2 + \sqrt{2}t + 1) \\ \iff \forall t \in \mathbb{R},\ t^2 = &\ t^3(u_1 + u_3) + t^2(-\sqrt{2}u_1 + u_2 + \sqrt{2}u_3 + u_4) \\ &+ t(u_1 - \sqrt{2}u_2 + u_3 + \sqrt{2}u_4) + u_2 + u_4,\end{aligned}$$

or d'après le cours, si un polynôme admet une infinité de racines alors tous ses coefficients sont nuls, donc

$$(C) \iff \begin{cases} u_1+u_3 & =0 \\ u_2+u_4 & =0 \\ \sqrt{2}(u_3-u_1) & =1 \\ \sqrt{2}(u_2-u_4) & =0 \end{cases} \iff (u_2=u_4=0, u_1=-u_3, u_3=\frac{1}{2\sqrt{2}}).$$

Ainsi, $\dfrac{t^2}{1+t^4}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\dfrac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\dfrac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\Big)$.

**10°)** Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan t}\ dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_0^1\frac{t\ dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\int_0^1\frac{t\ dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}\Big)$.

Dans la dernière intégrale, posons $x=-t$. On obtient

$$-\int_0^1\frac{t\ dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}=-\int_0^{-1}\frac{-x\ (-dx)}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\int_{-1}^0\frac{t\ dt}{t^2-\sqrt{2}t+1},$$

donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan t}\ dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1\frac{t\ dt}{t^2-\sqrt{2}t+1}$.

**11°)** Posons $\displaystyle I=\int_{-1}^1\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\ dt$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1\frac{\frac{1}{2}(2t-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|t^2-\sqrt{2}t+1|\Big]_{-1}^1+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^1\frac{dt}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\Big|+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\sqrt{2}\text{arctan}(\sqrt{2}t-1)\Big]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}\Big|+\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1) \\ &= \ln\Big(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Big)+\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\ dt=\ln(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)$.

**12°)** Pour tout $x>0$, posons $h(x)=\text{arctan}x+\text{arctan}\frac{1}{x}$. $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0$, donc $h$ est constante, égale à $h(1)=2\text{arctan}1=\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x>0$, $\text{arctan}x+\text{arctan}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

Or $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$, donc $\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2}$.

**13°)** En conclusion, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan t}\ dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln(\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{2})$.

## Problème 2 : puissances descendantes

### Partie I : Quelques sommes

**1°)** Soit $m, k \in \mathbb{N}$.

Si $m > k$, $\binom{k}{m} = 0$ et $k^{\underline{m}} = \prod_{i=0}^{m-1}(k-i) = 0$ car ce produit contient le facteur $k-k=0$.

Si $m \leq k$, $\binom{k}{m} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{m!} = \dfrac{1}{m!}\prod_{i=0}^{m-1}(k-i) = \dfrac{k^{\underline{m}}}{m!}$.

**2°)** Soit $m \in \mathbb{N}$. $(-1)^{\underline{m}} = \prod_{i=0}^{m-1}(-1-i) = (-1)^m \prod_{i=0}^{m-1}(1+i) = (-1)^m m!$.

**3°)** **a)** $x^{\underline{m+1}} = \prod_{i=0}^{m}(x-i) = x\prod_{i=1}^{m}(x-1-(i-1)) = x\prod_{i=0}^{m-1}(x-1-i) = x(x-1)^{\underline{m}}$

et $x^{\underline{m+1}} = \prod_{i=0}^{m}(x-i) = (x-m)\prod_{i=0}^{m-1}(x-i) = (x-m)x^{\underline{m}}$.

**b)** On en déduit que
$(x+1)^{\underline{m+1}} - x^{\underline{m+1}} = (x+1)x^{\underline{m}} - x^{\underline{m}}(x-m) = x^{\underline{m}}(x+1-x+m) = (m+1)x^{\underline{m}}$.

**4°)** **a)** Soit $m, n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,
$\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}} = \dfrac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}((k+1)^{\underline{m+1}} - k^{\underline{m+1}})$. Il s'agit d'une somme télescopique,

donc $\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}} = \dfrac{1}{m+1}((n+1)^{\underline{m+1}} - 0^{\underline{m+1}}) = \dfrac{1}{m+1}(n+1)^{\underline{m+1}}$.

**b)** $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{1}} = \dfrac{1}{2}(n+1)^{\underline{2}} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}) = \dfrac{1}{3}(n+1)^{\underline{3}} + \dfrac{1}{2}(n+1)^{\underline{2}}$, donc

$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{(n+1)n(n-1)}{3} + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)n(2(n-1)+3)}{6} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**c)** $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \dfrac{1}{p!}\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{p}} = \dfrac{1}{p!}\,\dfrac{1}{p+1}(n+1)^{\underline{p+1}}$ d'après la question a, donc

$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Donnons une preuve combinatoire de cette formule : $\binom{n+1}{p+1}$ est le nombre de façons de choisir une partie de $p+1$ éléments dans $\{1, \ldots, n+1\}$. Mais pour réaliser un tel choix, on peut commencer par choisir le plus grand de ces $p+1$ éléments, que l'on notera $k+1$, avec $k$ nécessairement plus grand que $p$ (sinon, d'après le principe des tiroirs, les $p+1$ éléments ne seraient pas deux à deux distincts) et $k$ inférieur à $n$. Puis il reste à choisir les $p$ autres éléments entre 1 et $k$, donc par double comptage, $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

**Partie II : une pseudo-formule du binôme**

**5°)** Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $R(m)$ l'assertion : $(x+y)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-k}}$.

Montrons $R(m)$ par récurrence.

Pour $m=0$, $(x+y)^{\underline{m}} = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-k}} = 1$, d'où $R(0)$.

Pour $m \geq 0$, supposons $R(m)$ et montrons $R(m+1)$.

D'après la question 3.a, $(x+y)^{\underline{m+1}} = (x+y)^{\underline{m}}(x+y-m)$, donc d'après $R(m)$,

$(x+y)^{\underline{m+1}} = (x+y-m) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-k}}$,

or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x+y-m = (x-k) + (y-(m-k))$, donc

$(x+y)^{\underline{m+1}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}}(x-k) \times y^{\underline{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-k}}(y-(m-k))$, donc à nouveau d'après 3.a,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{\underline{m+1}} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k+1}} \times y^{\underline{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m-(k-1)}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m+1-k}} \\
&= x^{\underline{m+1}} y^{\underline{0}} + \sum_{k=1}^{m} \left( \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right) x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m+1-k}} + x^{\underline{0}} \times y^{\underline{m+1}} \\
&= x^{\underline{m+1}} y^{\underline{0}} + x^{\underline{0}} \times y^{\underline{m+1}} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m+1-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{\underline{k}} \times y^{\underline{m+1-k}},
\end{aligned}$$

ce qui prouve $R(m+1)$.

D'après le principe de récurrence, $R(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

**6°) a)** Soit $m \in \mathbb{N}$. $\binom{-1}{m} = \dfrac{(-1)^{\underline{m}}}{m!} = (-1)^m$ d'après la question 2.

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$\binom{x}{m} + \binom{x}{m+1} = \dfrac{(m+1)x^{\underline{m}} + x^{\underline{m+1}}}{(m+1)!}$, donc d'après la question 3.b,

$\binom{x}{m} + \binom{x}{m+1} = \frac{(x+1)^{\underline{m+1}}}{(m+1)!} = \binom{x+1}{m+1}$.
Cette formule généralise la formule du triangle de Pascal.
**c)** Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.
$\sum_{k=0}^{m} \binom{x}{k} \binom{y}{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{m-k}}}{(m-k)!} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{m-k}}$, donc d'après la pseudo-formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{m} \binom{x}{k} \binom{y}{m-k} = \frac{1}{m!}(x+y)^{\underline{m}} = \binom{x+y}{m}$.

**7°) a)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.
$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{x}{k} = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{x}{k} \binom{-1}{m-k}$, donc d'après la pseudo-formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^m \binom{x-1}{m}$.

**b)** Soit $k \in \mathbb{N}$. $(-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k 4^k}{k!} (-\frac{1}{2})^{\underline{k}} = \frac{(-1)^k 4^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (-\frac{1}{2} - i)$,

donc $(-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{2^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (2i+1) = \frac{2^k (k!)}{(k!)^2} \prod_{i=0}^{k-1} (2i+1)$, or $2^k (k!) = \prod_{i=1}^{k} (2i)$,

donc $(-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(2k)!}{(k)^2} = \binom{2k}{k}$.
**c)** Soit $m \in \mathbb{N}$.
$\sum_{k=0}^{m} \binom{2k}{k} \binom{2(m-k)}{m-k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k 4^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^{m-k} 4^{m-k} \binom{-\frac{1}{2}}{m-k}$, donc
$\sum_{k=0}^{m} \binom{2k}{k} \binom{2(m-k)}{m-k} = (-1)^m 4^m \sum_{k=0}^{m} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{m-k} = (-1)^m 4^m \binom{-1}{m}$ d'après la question 6.c. Ainsi, d'après la question 6.a, $\sum_{k=0}^{m} \binom{2k}{k} \binom{2(m-k)}{m-k} = 4^m$.

**Partie III : puissances descendantes négatives**

**8°) a)** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $x^{\underline{-m}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} (x+i)}$ est défini si et seulement si $\prod_{i=1}^{m} (x+i)$ est non nul, donc si et seulement si $x \notin \{-m, -m+1, \dots, -1\}$.
**b)** Lorsque $m = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x^{\underline{0}} = 1 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{0} (x+i)}$, donc la définition des puissances descendantes négatives est encore valable pour $m = 0$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leq -1$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{m, m+1, \dots, -1\}$. Alors $x^{\underline{m}}$, $x^{\underline{m+1}}$ et $(x+1)^{\underline{m+1}}$ sont définis.

De plus, $x^{\underline{m+1}} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{-m-1}(x+i)} = \dfrac{x-m}{\displaystyle\prod_{i=1}^{-m}(x+i)} = (x-m)x^{\underline{m}}$

et $(x+1)^{\underline{m+1}} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{-m-1}(x+1+i)} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=2}^{-m}(x+i)} = \dfrac{x+1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{-m}(x+i)} = (x+1)x^{\underline{m}}$.

Ainsi, les relations du 3.a sont encore valables. La preuve du 3.b s'adapte alors sans aucun changement, donc la relation du 3.b est encore valable.

**9°) a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{-m}} = \frac{1}{-m+1}\sum_{k=0}^{n}\Big((k+1)^{\underline{-m+1}} - k^{\underline{-m+1}}\Big)$, donc

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \frac{1}{-m+1}\Big((n+1)^{\underline{-m+1}} - 0^{\underline{-m+1}}\Big)$,

or $(n+1)^{\underline{-m+1}} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m-1}(n+1+i)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $m-1 \geq 1$, et $0^{\underline{-m+1}} = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m-1} i} = \dfrac{1}{(m-1)!}$,

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(m-1)!(m-1)}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} = \frac{1}{(m-1)!(m-1)}$.

**b)** Soit $n \geq m$.

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = \sum_{k=m}^{n} \frac{m!}{k(k-1)\cdots(k-m+1)} \sum_{k=m}^{n} \frac{m!}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(k-m+i)} = \sum_{k=m}^{n} m!(k-m)^{\underline{-m}}$, donc

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\binom{k}{m}} = m!\sum_{k=0}^{n-m} k^{\underline{-m}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{m!}{(m-1)!(m-1)}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{m}} = \frac{m}{m-1}$.