DM 17. Enoncé

Problème 1 : un anneau principal

Définitions et propriétés (admises) : Soit A un ensemble.

- On dit que $(A,+)$ est un groupe commutatif si et seulement si,
  pour tout $x, y \in A$, $x+y$ désigne un élément de A et si, pour tout $x, y, z \in A$,
  - $x+y = y+x$ (commutativité) ;
  - $(A,+)$ possède un élément neutre, c'est-à-dire qu'il existe $0_A \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $x + 0_A = x$;
  - il existe $x' \in A$ tel que $x + x' = 0_A$. On dit que x' est le symétrique de x et on le note $-x$.
  - $x + (y+z) = (x+y)+z$ (associativité).
- Si $(A,+)$ est un groupe commutatif, on dit qu'une partie B de A est un sous-groupe de A si et seulement si B est une partie non vide de A telle que pour tout $x, y \in B$, $x - y \in B$. Dans ce cas, $(B,+)$ est un groupe dont l'élément neutre est encore 0_A.
- Si $(A,+)$ et $(B,+)$ sont deux groupes et si $f : A \longrightarrow B$ est une application, on dit que f est un morphisme de groupes si et seulement si, pour tout $x, y \in A$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- Si $(A,+)$ est un groupe et $f : A \longrightarrow A$ est une application de A dans lui-même, on dit que f est un automorphisme de groupes si et seulement si f est un morphisme de groupe et si f est bijective.
- On dit que $(A,+,\times)$ est un anneau si et seulement si, pour tout $x, y \in A$, $x+y$ et $x \times y$ désignent des éléments de A, si $(A,+)$ est un groupe commutatif et si, pour tout $x, y, z \in A$,
  - $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ (associativité) ;
  - $(A,\times)$ possède un élément neutre, c'est-à-dire qu'il existe $1_A \in A$ tel que, pour tout $x \in A$, $x \times 1_A = 1_A \times x = x$;
  - $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$ et $(x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$ (distributivité).
- Un anneau $(A,+,\times)$ est dit commutatif si et seulement si, pour tout $x, y \in A$, $x \times y = y \times x$.
- On suppose que $(A,+,\times)$ est un anneau, dont les éléments neutres sont notés 0_A et 1_A.

- Lorsque $B \subset A$, on dit que B est un sous-anneau de A si et seulement si c'est un sous-groupe de A tel que $1_A \in B$ et tel que, pour tout $a, b \in B$, $ab \in B$. Dans ce cas, $(B, +, \times)$ est un anneau, muni des mêmes éléments neutres 0_A et 1_A.
- Si $a \in A$, on dit que a est inversible dans A si et seulement si il existe $b \in A$ tel que $ab = ba = 1_A$. Dans ce cas, b est unique et il est noté a^{-1}.
- On dit que A est un corps si et seulement si $A \neq \{0_A\}$, A est un anneau commutatif, et si pour tout $a \in A \setminus \{0_A\}$, a est inversible dans A.
- Lorsque A est un corps et que $B \subset A$, on dit que B est un sous-corps de A si et seulement si B est un sous-anneau de A tel que, pour tout $b \in B \setminus \{0\}$, $b^{-1} \in B$.
- On dit que f est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$ si et seulement si c'est un automorphisme du groupe $(A, +)$ tel que $f(1_A) = 1_A$ et tel que, pour tout $a, b \in A$, $f(ab) = f(a)f(b)$.

Partie I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n n'est pas le carré d'un entier.
On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n}/(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n}/(a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$

1°) a) Prouver que $\sqrt{n}$ n'est pas un rationnel.
b) En déduire que tout élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ s'écrit de manière unique sous la forme $a + b\sqrt{n}$, où $a, b \in \mathbb{Q}$.

2°) a) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de démontrer que $\mathbb{R}$ est un corps).
b) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$.

3°) Lorsque $z = a + b\sqrt{n} \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, on appelle conjugué de z l'élément $\overline{z} = a - b\sqrt{n}$ et on appelle norme de z la quantité $N(z) = z\overline{z}$.
a) Montrer que l'application $z \longmapsto \overline{z}$ est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$.
b) Soit $z, z' \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Montrer que $[N(z) = 0 \iff z = 0]$.
Montrer que $N(zz') = N(z)N(z')$.
c) Soit $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ si et seulement si $|N(z)| = 1$.

Partie II

Dans toute cette partie, n est égal à 2 ou à 3.

4°) a) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $|\alpha - a| \leq \frac{1}{2}$.
b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, il existe $q \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tel que $|N(z - q)| < 1$.

5°) a) Soit $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ avec $y \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tels que $x = qy + r$ et $|N(r)| < |N(y)|$.
b) Le couple (q, r) est-il unique ?

6°) Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et I une partie de A. On dit que I est un idéal de l'anneau A si et seulement si I est un sous-groupe de $(A, +)$ tel que, pour tout $a \in A$ et $i \in I$, $ai \in I$.
Soit $a_0 \in A$. On pose $a_0 A = \{a_0 b / b \in A\}$. Montrer que $a_0 A$ est le plus petit idéal de A contenant a_0.
On dit que $a_0 A$ est l'idéal engendré par l'élément a_0.

7°) Soit I un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. On suppose que $I \neq \{0\}$.
a) Montrer que l'on peut poser $k_0 = \min(\{|N(z)| / z \in I \setminus \{0\}\})$.
b) Soit y un élément de $I \setminus \{0\}$ tel que $|N(y)| = k_0$.
Montrer que I est l'idéal engendré par y.
c) Quels sont les sous-anneaux de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$?

Problème 2 : une intégrale dépendant d'un paramètre

1°) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + t + x}.$$

a) Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) Montrer que $xF(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

2°) Pour tout $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F_a(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{at + x}$.
a) Calculer $F_a(x)$, pour tout $a, x \in \mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_2(x) \leq F(x) \leq F_1(x)$.
c) En déduire la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.
d) Montrer que $\dfrac{F(x)}{-\ln x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

3°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (t^3 + t)^n \, dt.$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \frac{2^{n-1}}{n+1} + \frac{6}{n+1} \int_0^1 \frac{t(t^3 + t)^{n+1}}{(3t^2 + 1)^2} \, dt.$$

b) Montrer que $\dfrac{1}{2^n} \displaystyle\int_0^1 \frac{t(t^3 + t)^{n+1}}{(3t^2 + 1)^2} \, dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire une suite a_n aussi simple que possible telle que $\dfrac{I_n}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

4°) a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1}{1+u} - 1 + u - u^2 + \cdots + (-1)^n u^{n-1}\right| \leq u^n.$$

b) Soit $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left|\frac{1}{t^3+t+x} - \frac{1}{x} + \frac{t^3+t}{x^2} - \frac{(t^3+t)^2}{x^3} + \cdots + (-1)^n \frac{(t^3+t)^{n-1}}{x^n}\right| \leq \frac{2^n}{x^{n+1}}.$$

c) Montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(x) = \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x^n}$, où ε est une fonction telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.