Feuille d'exercices 7.
Corrigé d'un exercice.

Exercice 7.14 :

1°) $\diamond$ On suppose que f est injective. Alors on a vu en cours (à redémontrer ici) que, pour tout $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$, donc $\widehat{f^{-1}} \circ \hat{f} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$. Alors, d'après le cours, $\hat{f}$ est injective et $\widehat{f^{-1}}$ est surjective.
$\diamond$ Supposons que $\hat{f}$ est injective. Soit $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$.
Alors $\{f(x)\} = \hat{f}(\{x\}) = \{f(y)\} = \hat{f}(\{y\})$, donc $\{x\} = \{y\}$ puis $x = y$.
$\diamond$ Supposons que $\widehat{f^{-1}}$ est surjective.
Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Par hypothèse, il existe $G \subset F$ tel que $\{x\} = f^{-1}(G)$.
$x \in f^{-1}(G)$, donc $f(x) \in G$, or $f(x) = f(y)$, donc $f(y) \in G$ puis $y \in f^{-1}(G) = \{x\}$.
Ainsi, $x = y$, ce qui prouve que f est injective.

2°) $\diamond$ On suppose que f est surjective. Alors on a vu en cours (à redémontrer ici) que, pour tout $B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$, donc $\hat{f} \circ \widehat{f^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(F)}$. Alors, d'après le cours, $\hat{f}$ est surjective et $\widehat{f^{-1}}$ est injective.
$\diamond$ Supposons que $\hat{f}$ est surjective. Soit $y \in F$. Alors $\{y\} \in \mathcal{P}(F)$, donc il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\{y\} = f(A)$. Si $A = \emptyset$, alors $\{y\} = f(\emptyset) = \emptyset$, ce qui est faux, donc il existe $a \in A$. Alors $f(a) \in f(A) = \{x\}$, donc $f(a) = x$. Ainsi f est surjective.
$\diamond$ Supposons que $\widehat{f^{-1}}$ est injective. Soit $y \in F$.
$\{y\} \neq \emptyset$ donc $\widehat{f^{-1}}(\{y\}) \neq \widehat{f^{-1}}(\emptyset) = \emptyset$. Ainsi, il existe $x \in \widehat{f^{-1}}(\{y\})$.
Alors $f(x) = y$, donc f est surjective.