Résumé de cours :
Semaine 10, du 18 au 22 novembre.

1 Applications et cardinaux (suite et fin)

1.1 Ensembles dénombrables (suite et fin)

Propriété. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Propriété. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Hors programme : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

1.2 Listes et combinaisons

Vocabulaire : Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$.
- Une p-liste (aussi appelée un p-uplet) d'éléments de E est un élément de E^p.
- Un p-arrangement d'éléments de E est une p-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.
- Une p-combinaison de E est une partie de E de cardinal p.

Propriété. Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p (c'est $|E|^p$).

Propriété. Si $a = (e_1, \ldots, e_p)$ est un p-arrangement de E, l'application $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_p & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & e_i \end{array}$ est une injection. De plus, $a \longmapsto f_a$ est une bijection de l'ensemble A_p des p-arrangements de E vers l'ensemble I_p des injections de $\mathbb{N}_p$ dans E.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Le nombre de p-arrangements dans un ensemble de cardinal n est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. C'est aussi le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{S}_n| = n!$. Plus généralement, factorielle de n est le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal n dans un autre ensemble de cardinal n.

Théorème. Le nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire le nombre de parties de p éléments incluses dans un ensemble de cardinal n est égal à

$$\binom{n}{p} \triangleq \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Cette quantité s'appelle le coefficient binomial "p parmi n".
Il faut savoir le démontrer.

1.3 Les coefficients binomiaux

Formule : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule comité-président : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

La preuve combinatoire est à connaître.

Formule comité-bureau : si $p \leq k \leq n$, $\binom{k}{p} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{k-p}$.

La preuve combinatoire est à connaître.

Formule du triangle de Pascal : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

La preuve combinatoire est à connaître.

Remarque. Il est souvent pratique de convenir que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\binom{n}{p} = 0$.

Représentation graphique du triangle de Pascal : À connaître.

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1a_2 = a_2a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k\ a_2^{n-k}.$$

Les deux preuves sont à connaître.

Formule du multinôme : (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ p éléments d'un anneau A qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1+\cdots+i_p=n}} \frac{n!}{i_1! \times \cdots \times i_p!}\, a_1^{i_1} \times \cdots \times a_p^{i_p}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}$.

Il faut savoir le démontrer.

1.4 Sommes et produits : quelques techniques

1.4.1 Télescopage

$\sum_{k=m}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$ et $\sum_{k=m+1}^{n+1}(u_{k-1} - u_k) = u_m - u_{n+1}$.

1.5 Séparation des indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2p+1}.$$

1.5.1 Fonction génératrice

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$ et soit $(u_k)_{m\leq k\leq n}$ une famille de complexes. La fonction génératrice de cette famille est l'application polynomiale $P : x \longmapsto \sum_{k=m}^{n} u_k x^k$.

Si P est connu, on peut en déduire plusieurs sommes : $\sum_{k=m}^{n} u_k = P(1)$, $\sum_{k=m}^{n} k u_k = P'(1)$, $\sum_{k=m}^{n} k(k-1)u_k = P''(1)$, $\sum_{k=m}^{n} \frac{u_k}{k+1} = \int_0^1 P(t)dt$ etc.

1.5.2 Quelques formules

Formule de Bernoulli : Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soit a et b deux éléments de A qui commutent (i.e $ab = ba$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Il faut savoir le démontrer.

Somme géométrique : Une suite (u_n) de complexes est géométrique de raison r si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = r u_n$. Dans ce cas, $u_n = u_0 r^n$ et $\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_{n+1} - u_m}{r-1}$.

1.6 Sommes doubles

$$\sum_{\substack{m\leq k\leq n \\ p\leq \ell\leq q}} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=p}^{q} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=p}^{q}\sum_{k=m}^{n} u_{k,\ell}.$$

Propriété. Dans un anneau, $\sum_{\substack{m\leq k\leq n \\ p\leq \ell\leq q}} v_k w_\ell = \Big(\sum_{k=m}^{n} v_k\Big)\Big(\sum_{\ell=p}^{q} w_\ell\Big)$.

1.6.1 Sommes triangulaires

$$\sum_{m\leq k\leq \ell\leq n} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=m}^{n}\sum_{k=m}^{\ell} u_{k,\ell}.$$

Il faut savoir le démontrer.

1.6.2 Produits

Toutes les propriétés précédentes, lorsqu'elles étaient valables dans un monoïde commutatif $(G, +)$ sont valables en notation multiplicative dans un monoïde commutatif $(G, \times)$.

2 Construction de $\mathbb{C}$

2.1 Structure de corps

Propriété. $\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps et dont les lois sont définies par

$$\boxed{\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \begin{cases} (a+ib)+(c+id) & = (a+c)+i(b+d) \\ (a+ib)\times(c+id) & = (ac-bd)+i(ad+bc) \end{cases}}$$

Si $z \neq 0$, $\boxed{\text{l'inverse de } z = a + ib \text{ est } \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}}$.

Définition. $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists! a, b \in \mathbb{R},\ z = a + ib$. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
L'écriture du complexe z sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ s'appelle l'écriture algébrique de z.

Définition. Les imaginaires purs sont les ib où $b \in \mathbb{R}$.

Propriété. Comme pour tout corps, $\mathbb{C}$ est intègre, c'est-à-dire que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriété. $\boxed{\dfrac{1}{i} = -i}$.

Linéarité des parties réelle et imaginaire : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Re}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.