Feuille d'exercices 8.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 8.14 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x_k$. On calcule successivement

$$\begin{aligned}
S &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} y_h \\
&= (-1)^n \sum_{0 \leq h \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{h} y_h \\
&= (-1)^n \sum_{h=0}^{n} \sum_{k=h}^{n} (-1)^k y_h \binom{n}{h} \binom{n-h}{k-h} \quad \text{(d'après la formule comité-président)} \\
&= (-1)^n \sum_{h=0}^{n} y_h \binom{n}{h} \sum_{p=0}^{n-h} (-1)^{p+h} \binom{n-h}{p} \quad \text{(en posant } p = k-h\text{)} \\
&= (-1)^n \sum_{h=0}^{n} y_h \binom{n}{h} (-1)^h (1-1)^{n-h} \\
&= (-1)^n y_n \binom{n}{n} (-1)^n 0^0 \\
&= y_n, \text{ ce qui conclut.}
\end{aligned}$$

Exercice 8.16 :

Notons E l'ensemble des couples (x, A) tels que $x \in \mathbb{N}_n$, $A \subset \mathbb{N}_{2n}$, $x \in A$ et $|A| = n$. Pour choisir un élément de E, on peut d'abord choisir x, soit n choix, puis les $n-1$ autres éléments de E parmi les $2n-1$ autres éléments restants de $\mathbb{N}_{2n}$, soit $\binom{2n-1}{n-1}$ choix. Ainsi, $|E| = n \binom{2n-1}{n-1}$.

Cependant, pour choisir un élément de E, on peut d'abord fixer k entre 1 et n, choisir k éléments pour A dans $\mathbb{N}_n$ et $n-k$ éléments dans $\{n+1, \ldots, 2n\}$, soit $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ choix, puis choisir x parmi les k éléments de $\mathbb{N}_n$ choisis pour A, soit k choix.

Ainsi $|E| = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$, donc $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$.

Exercice 8.20 :
L'ensemble des nombres impairs de $\{1, \dots, n\}$ convient, donc on peut essayer de montrer que $|A| \le \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, auquel cas cette majoration sera optimale.
Soit donc A une partie non vide (il en existe) satisfaisant la propriété de l'énoncé.
Posons $m = \max A$ et notons $B = \{m - x / x \in A \setminus \{m\}\}$.
Alors $|B| = |A| - 1$ et $A \cap B = \emptyset$ (sinon, il existerait $y = m - x \in A$ avec $x \in A \setminus \{m\}$, auquel cas $x + y = m$ avec $x, y, m \in A$ ce qui est faux), donc $n \ge |A| + |B| = 2|A| - 1$, donc $|A| \le \frac{n+1}{2}$.

Exercice 8.21 :
Première démonstration : par codage.
Une application croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathcal{P}(E)$ peut s'écrire comme un p-uplet $(A_1, \dots, A_p)$ de parties de E telles que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_p$.
Pour construire un tel uplet, il suffit pour chaque $x \in E$, de décider si
— si $x \notin A_p$ (codé par 1) ;
— ou bien si $x \in A_p \setminus A_{p-1}$ (codé par 2) ;
— ou bien si $x \in A_{p-1} \setminus A_{p-2}$ (codé par 3) ;

$\vdots$

— ou bien si $x \in A_1$ (codé par $p + 1$).
Ainsi, pour construire une application croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathcal{P}(E)$, on a $p + 1$ choix pour chaque élément de E. Le procédé de construction qui à un n-uplet d'éléments de $\mathbb{N}_{p+1}$ associe l'unique application croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathcal{P}(E)$ correspondant à ce codage est surjectif (toute les applications sont atteintes) et injectif (chaque application n'est atteinte qu'une seule fois). On en déduit que le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est égal à $(p + 1)^n$.

Seconde démonstration : par récurrence.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(p)$ la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout ensemble E de cardinal n, le nombre d'applications croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est égal à $(p + 1)^n$.
Lorsque $p = 1$: soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un ensemble de cardinal n. Une application croissante de $\{1\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ correspond à la donnée d'un élément de $\mathcal{P}(E)$, dont le cardinal est égal à 2^n. Ceci prouve $R(1)$.
On suppose que $R(p)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un ensemble de cardinal n.
Pour construire un $(p + 1)$-uplet $(A_1, \dots, A_{p+1})$ de parties de E telles que
$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{p+1}$, on peut commencer par choisir $k = |A_{p+1}|$ entre 0 et n, puis on choisit A_{p+1} dans E (il y a $\binom{n}{k}$ choix), puis on choisit une application croissante $(A_1, \dots, A_p)$ de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathcal{P}(A_{p+1})$ (il y a $(p + 1)^k$ choix par hypothèse de récurrence).

Ainsi, le nombre d'applications croissantes de $\{1, \ldots, p+1\}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est égal à $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p+1)^k = (p+2)^n$, d'après la formule du binôme de Newton.
Ceci prouve $R(p+1)$.

Exercice 8.23 :

1°) Pour choisir une partie de $n+1$ entiers dans $\{1, \ldots, n+p+1\}$, on commence par choisir le maximum de cette partie, qui étant strictement plus grand que n est de la forme $n+1+k$ avec $0 \leq k \leq p$, puis on choisit les n autres éléments de la partie entre 1 et $n+k$.

2°) Pour choisir une partie de $M+N+1$ entiers dans $\{1, \ldots, n+1\}$, on commence par choisir le $(N+1)$-ième élément de cette partie dans l'ordre croissant, que l'on note $k+1$, avec $0 \leq k \leq n$, puis on choisit les N éléments inférieurs à $k+1$, soit $\binom{k}{N}$ choix, et enfin on choisit les M éléments supérieurs à $k+1$, soit $\binom{n-k}{M}$ choix.