

Feuille d'exercices 9 : Les complexes.

Exercice 9.1 : (niveau 1)

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$.

Exercice 9.2 : (niveau 1)

Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto xe^{-x}$.

Exercice 9.3 : (niveau 1)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument de

$(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n$, puis de $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

Exercice 9.4 : (niveau 1)

Résoudre dans \mathbb{C} le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} uv &= 1 - 8i \\ u^2 + v^2 &= -2 - 16i \end{cases}$$

Exercice 9.5 : (niveau 1)

Démontrer que la fonction \tan est absolument croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de \tan est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 9.6 : (niveau 1)

Déterminer les caractéristiques géométriques de la similitude s qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $Z = 2(1 + i)z - 7 - 4i$.

Exercice 9.7 : (niveau 1)

1°) Soient $u, v \in \mathbb{C}^*$. Démontrer la formule d'Al Kachi :

$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u| \cdot |v| \cdot \cos(\arg u - \arg v)$ et interpréter géométriquement ce résultat.

2°) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Démontrer l'identité du parallélogramme :

$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ et interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 9.8 : (niveau 1)

Soit $ABCD$ un carré; on suppose que C et D ont des coordonnées entières; montrer qu'il en est de même de A et B .

Exercice 9.9 : (niveau 1)

Dans le plan, on considère un cercle C de centre O et A, B, P trois points distincts de ce cercle. On souhaite démontrer que l'angle sous lequel O voit les points A et B est (modulo 2π) le double de l'angle sous lequel P voit les mêmes points A et B . C'est le théorème de l'angle au centre.

Pour cela, on choisit de munir le plan de sa structure complexe en choisissant O pour origine et le rayon du cercle pour unité de longueur. Les points A, B et P appartiennent alors au cercle unité, ce qui permet de noter $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ et $e^{i\theta}$ leurs affixes respectives. L'angle sous lequel O voit les points A et B est l'angle \widehat{AOB} dont une mesure (modulo 2π) est notée φ . De façon similaire, l'angle géométrique sous lequel P voit les points A et B est l'angle \widehat{APB} dont une mesure est notée ψ .

Exprimer φ et ψ en fonction de α et β et conclure.

Exercice 9.10 : (niveau 2)

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{2k}$.

Exercice 9.11 : (niveau 2)

Calculer les primitives de $f(x) = \cos(\ln x)$ et de $g(x) = \operatorname{sh} x \sin x$ selon deux méthodes : par intégration par parties et en utilisant les complexes.

Exercice 9.12 : (niveau 2)

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos a \neq 0$. Calculez $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(ka)}{(\cos a)^k}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(ka)}{(\cos a)^k}$.

Exercice 9.13 : (niveau 2)

Soit n un entier naturel supérieur à 2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$, où $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

Exercice 9.14 : (niveau 2)

Soient P un polynôme à coefficients réels, de degré impair, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 9.15 : (niveau 2)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une application de classe C^{n+1} de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que le reste de Taylor à l'ordre n de f en x_0 est égal à

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t_{n+1}} \dots \int_{x_0}^{t_2} f^{(n+1)}(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n+1}.$$

Exercice 9.16 : (niveau 2)

Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^\pi \sin^{2m} t \times \cos(2mt) dt$.

Exercice 9.17 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n , tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

On note, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$.

1°) Montrer que $\sum_{k=0}^n P(\omega_k) = n + 1$.

2°) En déduire que $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}$.

Exercice 9.18 : (niveau 2)

Déterminer les affixes $z \in \mathbb{C}$ des points du plan usuel tels que les points d'affixes z et les racines cubiques de z forment un parallélogramme.

Exercice 9.19 : (niveau 2)

1°) Dans le plan complexe, interpréter géométriquement la transformation $z \mapsto iz$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

2°) Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes de module 1. On note T le triangle de sommets les points M_i , d'affixe z_i , pour $i = 1, 2, 3$.

On note G le centre de gravité de T et H l'orthocentre de T .

a) Déterminer l'affixe de G .

b) On pose $z_0 = z_1 + z_2 + z_3$. Montrer que z_0 est l'affixe de H .

3°) Pour un triangle ABC , donner une relation liant le centre de gravité G , l'orthocentre H et le centre I du cercle circonscrit.

Exercice 9.20 : (niveau 2)

Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On se place dans un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct noté $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A, B et C trois points du plan d'affixes a, b et c .

Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct (i.e : $AB = AC = BC$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est une base directe) si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

Exercice 9.21 : (niveau 2)**Théorème de Pappus.**

1°) Soit a et b deux points distincts de \mathbb{U} . On note A, B , et E les points d'affixe a, b et 1. On note P le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) et p son affixe.

Montrer que $1 - p = \frac{(1-a)(1-b)}{2}$.

2°) En déduire le théorème de Pappus : Étant donné un quadrilatère $ABCD$ inscriptible dans un cercle C , pour tout point M du cercle C , le produit de la distance de M à deux côtés opposés, ou aux deux diagonales est le même, pour chacun des choix des deux paires de côtés opposés.

Exercice 9.22 : (niveau 3)

Soient A, B, C, D quatre points du plan. On considère les points E, F, G, H tels que les triangles ABE, BCF, CDG, DAH soient rectangles isocèles directs en E, F, G, H . Montrer que les vecteurs \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{FH} sont orthogonaux et de même norme.

Exercice 9.23 : (niveau 3)

Soient $n \geq 3$ et I_1, I_2, \dots, I_n des points distincts du plan. On s'intéresse à l'assertion A_n : " il existe un n -uplet (M_1, M_2, \dots, M_n) de points du plan tels que I_1 est le milieu de $[M_1, M_2]$, I_2 est le milieu de $[M_2, M_3]$, \dots , I_{n-1} est le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et I_n est le milieu de $[M_n, M_1]$ ".

1°) Démontrer que si A_4 est vraie alors $I_1I_2I_3I_4$ est un parallélogramme.

2°) a) Soient $r_{a,\alpha}$ la rotation de centre $a \in \mathbb{C}$ et d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r_{b,\beta}$ la rotation de centre $b \in \mathbb{C}$ et d'angle $\beta \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$, montrer que $r_{a,\alpha} \circ r_{b,\beta}$ est une translation. Sinon, montrer que $r_{a,\alpha} \circ r_{b,\beta}$ est une rotation d'angle $\alpha + \beta$.

b) Déterminer, en fonction de n , le nombre de solutions (M_1, M_2, \dots, M_n) du problème A_n et indiquer comment on peut les construire.

Exercices supplémentaires, non corrigés en cours :

Exercice 9.24 : (niveau 1)

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$.

Exercice 9.25 : (niveau 1)

Déterminer les complexes z tels que $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$.

Exercice 9.26 : (niveau 1)

1°) Calculer sous forme exponentielle les racines carrées de $-18i$, $1 - i$ et $-\sqrt{3} + i$.

2°) Calculer sous forme cartésienne les racines carrées de $3 - 4i$ et $-5 - 12i$.

Exercice 9.27 : (niveau 1)

1°) Mettre sous forme exponentielle $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$ et $z_4 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$.

2°) Calculer $Z_1 = (z_1)^{2018}$ et $Z_4 = (z_4)^{20}$.

3°) Déterminer les entiers naturels n tels que $\omega_n = (z_3)^n$ soit un nombre réel.

Exercice 9.28 : (niveau 1)

Résoudre dans \mathbb{C} le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} ab &= -24 - 10i \\ a + b &= 5 - 14i \end{cases}.$$

Exercice 9.29 : (niveau 1)

Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Démontrer que l'application $f_\omega : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{U}, f_\omega(z) = \frac{z + \omega}{\bar{\omega}z + 1}$$

est une bijection dont on précisera la bijection réciproque.

Exercice 9.30 : (niveau 1)

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $z^n = \bar{z}$.

Exercice 9.31 : (niveau 1)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En utilisant deux méthodes différentes, calculer les primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$.

Exercice 9.32 : (niveau 2)

Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az + b = (cz + d)\bar{z}$.

Exercice 9.33 : (niveau 2)

1°) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}(|z + z'|^2 + |z - z'|^2).$$

2°) En déduire que, pour tout $z, z', u \in \mathbb{C}^3$ tels que $u^2 = zz'$,

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} - u \right|.$$

Exercice 9.34 : (niveau 2)

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On pose $Z = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \bar{z} + 2|z|}}$.

Montrer que Z est défini et que $Z^2 = z$.

Exercice 9.35 : (niveau 2)

Montrer qu'il n'est pas possible que les trois sommets d'un triangle équilatéral, non réduit à un point, aient des coordonnées entières.

Exercice 9.36 : (niveau 2)

Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 1$. Montrer que $a = 1$ ou $b = 1$ ou $c = 1$.

Exercice 9.37 : (niveau 2)

Soit n un entier naturel supérieur à 2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|$, où $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

Exercice 9.38 : (niveau 2)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a + b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$.

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 9.39 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|}{1 + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$.

Exercice 9.40 : (niveau 2)

Soit ABC un triangle direct. Soit D le centre d'un carré de côté AB , de sorte que D et C soient du même côté de la droite (AB) et soit E le centre d'un carré de côté BC , de sorte que E et A ne soient pas du même côté de la droite (BC) .

Déterminer l'angle formé entre la droite (AC) et la droite (DE) .

Exercice 9.41 : (niveau 2)

On pose $P = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$, et $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

On note f l'application définie pour tout $z \neq -i$ par $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

1°) Montrer que f réalise une bijection de P sur D .

2°) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$. On considère l'application h définie dans \mathbb{C} par $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

a) Montrer que pour tout z du domaine de définition \mathcal{D}_h de h , $\text{Im}(h(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$.

b) En déduire que h est une bijection de P sur P .

Exercice 9.42 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{U}^3$ tel que $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n = 1$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
Montrer que n est un multiple de 3.

Exercice 9.43 : (niveau 2)

Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations de centre A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Exprimer $R_3 \circ R_2 \circ R_1$.

Exercice 9.44 : (niveau 3)

Soit ABC un triangle direct. On coupe chaque côté en trois parts égales, et on construit sur le tiers du milieu un triangle équilatéral extérieur au triangle ABC , de sommets respectifs D, E et F (D est construit à partir du segment $[A, B]$, E à partir de $[B, C]$ et F à partir de $[A, C]$).

Montrer que les deux triangles ABC et DEF ont le même centre de gravité.

Montrer que DEF est équilatéral.

Exercice 9.45 : (niveau 3)

1°) On considère trois points A, B et C du plan complexe, dont les affixes sont notés a, b et c . Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} = \frac{c-b}{a-b}$.

Montrer que c'est équivalent à la condition $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

2°) On considère un triangle ABC ainsi qu'un entier n supérieur ou égal à 3. Le segment $[B, C]$ est une arête d'un n -gone régulier, situé dans l'extérieur du triangle, dont le centre est noté A' . De même les segments $[A, C]$ et $[A, B]$ permettent de définir les points B' et C' , en tant que centres de n -gones réguliers, situés à l'extérieur du triangle, dont l'une des arêtes est $[A, C]$ (resp : $[A, B]$).

À quelle condition sur n le triangle $A'B'C'$ est-il équilatéral ?

Exercice 9.46 : (niveau 3)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{4}$.

Exercice 9.47 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k^2)}$. Calculer $|Z|^2$.