Résumé de cours :
Semaine 11, du 25 novembre au 29 novembre.

Les complexes (suite)

1 Le plan complexe

Définition. On considère un plan P affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors définir le complexe $z = x + iy$ et le point M de P dont les coordonnées dans le repère R sont (x, y). On dit que z est l'affixe du point M et que M est l'image du complexe z.
Si l'on note $M(z)$ l'image du complexe z, l'application $z \longmapsto M(z)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans P qui permet parfois d'identifier $\mathbb{C}$ avec P (muni de son repère R).
On dit également que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
Si l'on note $\overrightarrow{u(z)}$ le vecteur image de z, l'application $z \longmapsto \overrightarrow{u(z)}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des vecteurs de P.
Pour ces raisons, $\mathbb{C}$ est souvent appelé le plan complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Avec les notations précédentes, notons $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_{z'}}$ les vecteurs images de z et z'. Alors le vecteur $\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{u_{z'}}$ a pour affixe $z + z'$.
Ainsi, si l'on identifie $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des vecteurs de P, l'addition entre complexes correspond à l'addition entre vecteurs du plan.
Si l'on visualise les deux complexes z et z' par deux points M_z et $M_{z'}$ du plan P, le complexes $z + z'$ est donc le point qui complète $O, M_z, M_{z'}$ en un parallélogramme.

Interprétation géométrique de la différence de deux complexes :
Avec les mêmes notations, $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Définition. L'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation suivante du plan :
$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M & \longmapsto & \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M} \end{array}.$$

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel :
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αz est l'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{OM(z)}$.
Ainsi, αz est aussi l'affixe de l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre O et de rapport α.

2 La conjugaison

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le conjugué du complexe z est le complexe $\overline{z} \stackrel{\Delta}{=} x - iy$.

Géométriquement, $\overline{z}$ est le symétrique de z selon l'axe Ox des réels.

Propriété. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

3 Le module

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le module du complexe $z = x + iy$ est $|z| \overset{\Delta}{=} \sqrt{x^2+y^2}$.

Interprétation géométrique :
$|z|$ désigne la distance du point $M(z)$ à l'origine, ainsi que la norme du vecteur $\overrightarrow{u(z)}$.
La distance entre $M(z)$ et $M(z')$ est égale à $|z - z'|$.

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,
- $|z| = |\overline{z}|$ (compatibilité du module avec la conjugaison) ;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ (compatibilité du module avec la multiplication) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$;
- si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Propriété. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'application $|.|\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $|z| \geq 0$ (positivité),
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$ (séparation),
- $|\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ (homogénéité),
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Il faut savoir le démontrer.

Distance entre complexes : Lorsque $x, y \in \mathbb{C}$, la quantité $d(x,y) = |x-y|$ est appelée la distance entre les deux complexes x et y.
La fonction distance vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$,
- Positivité : $d(x,y) \in \mathbb{R}_+$.
- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$: d permet de *séparer* les complexes.
- Symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$.
- Inégalité triangulaire : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a,r) = \{z \in \mathbb{C}/|z-a| \leq r\}$. C'est le disque de centre a et de rayon r.
- Lorsque $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est $B_o(a,r) = \{z \in \mathbb{C}/d(a,z) < r\}$. C'est le disque ouvert de centre a et de rayon r.
- La sphère de centre a et de rayon r est $S(a,r) = \{z \in \mathbb{C}/d(a,z) = r\}$. C'est le cercle de centre a et de rayon r.

Définition. $S(0,1)$ s'appelle la sphère unité ou bien le cercle unité. Il est noté $\mathbb{U}$.

Propriété. $\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}}$.

Théorème.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou bien $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.
Il faut savoir le démontrer.

Généralisation : (hors programme) $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$, avec égalité si et seulement si, pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $(z_j = 0) \vee (\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire de l'inégalité triangulaire :
- Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie A de $\mathbb{C}$ est bornée si et seulement si il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leq R$, c'est-à-dire si et seulement si A est incluse dans un disque centré en 0.

4 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4.1 Fonctions bornées

Définition. Soit E un ensemble quelconque et f une application de E dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est bornée sur E si et seulement si $\{f(x)/x \in E\}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Notation. Soit f une application d'un ensemble E dans $\mathbb{C}$.
On note $\begin{array}{rccc}\mathrm{Re}(f): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x))\end{array}$ et $\begin{array}{rccc}\mathrm{Im}(f): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x))\end{array}$. On les appelle les parties réelle et imaginaire de l'application f.

Propriété. Avec ces notations, f est bornée sur E si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées.

4.2 Dérivation

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On verra plus loin que f est continue (resp : dérivable, k fois dérivable, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues (resp : dérivables, k fois dérivables, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). De plus, lorsque f est k fois dérivable, où $k \in \mathbb{N}^*$, on verra que,
pour tout $t \in I$, $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

Propriété. Les formules suivantes, déjà admises pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont aussi valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que nous le démontrerons plus tard.
Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies. :
- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
- Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

4.3 Intégration

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt.$$

Remarque. Ainsi, $\mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt$ et $\mathrm{Im}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.

On admettra pour le moment que les intégrales vérifient les propriétés suivantes :

Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a, b \in I$.

— Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

— Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.

— Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)|\ dt$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.
On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.
Si F_0 est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue. Soit $x_0 \in I$. Alors $x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.
Si F est une primitive de f, alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \stackrel{\Delta}{=} [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est C^1 de I dans $\mathbb{C}$, pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture "$\int f(t)\ dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k / k \in \mathbb{C}\}$.

Changement de variable :
si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et si $\varphi : J \longrightarrow I$ est de classe C^1, alors $\forall (\alpha, \beta) \in J^2$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. Cette égalité correspond au changement de variable $x = \varphi(t)$.

Intégration par parties : soit $u : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$.

On a aussi : $\int u(t)v'(t)\ dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\ dt,\ \ t \in I$.

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral.
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f\ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^{k+1} sur $[a,b]$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{h=1}^{k} \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Il faut savoir le démontrer.

5 L'exponentielle complexe

Définition. Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N,\ \ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition. La série de complexes $\sum z_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k$.

Propriété. Si $\sum z_n$ est une série convergente de complexes, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La réciproque est fausse : on peut avoir $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que la série $\sum z_n$ diverge.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ est une série convergente. On dit alors que la série $\sum z_n$ est absolument convergente.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Ceci permet de prolonger l'exponentielle réelle sur $\mathbb{C}$, en convenant que $\forall z \in \mathbb{C},\ \ e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Propriété. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta \triangleq \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \triangleq \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}.$$

De plus,

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Propriété. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin\theta = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. sin est une fonction impaire et cos est une fonction paire.
cos et sin sont de classe C^∞ et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
Il faut savoir le démontrer.
Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formule d'addition : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum(-1)^n\alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème spécial des séries alternées (TSSA).
Soit $\sum a_n$ une série alternée. On dit qu'elle est spéciale alternée lorsque la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0. Dans ce cas, $\sum a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme a_n et $\displaystyle|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$.

Propriété. L'application cos est strictement décroissante sur $]0,2]$ et elle possède un unique zéro sur $]0,2]$, que l'on notera $\dfrac{\pi}{2}$: c'est la **définition** de π.

Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ et $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.
On dispose des tableaux de variations suivants :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2π est la plus petite période de cos, ainsi que de sin.

Propriété. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2+b^2 = 1$.
Il existe un unique $\theta \in [0,2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Corollaire. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$. Alors $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0,2\pi[$ est bijective.

Définition. Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $M: \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ une application de classe C^1. Notons $C = \{M(t)/t \in [a,b]\}$: C est une courbe dans le plan complexe, dont l'application M est un paramétrage. Par définition, la longueur de C est égale à $\displaystyle\int_a^b |M'(t)|dt$.

Propriété. Soit $\theta \in [0,2\pi]$. Notons $C_\theta = \{e^{it}/t \in [0,\theta]\}$: C_θ est une portion du cercle unité. Sa longueur est égale à θ.