DM 20 : un corrigé

Problème 1 : fractions continues

Partie 1 : notations.

1°) $\diamond$ x_0 est bien défini et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que x_n est bien défini et que $x_n \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors, avec les conventions de l'énoncé, $\{x_n\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$, puis $x_{n+1} = \dfrac{1}{\{x_n\}}$ est bien défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, en tant que suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.
$\diamond$ Alors l'énoncé permet bien de définir $a_n = \lfloor x_n \rfloor \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
$\diamond$ On convient naturellement que, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty$.
Alors, pour tout $s, t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, la quantité $s + \frac{1}{t}$ est définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.
$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante : pour tout $s_0, \dots, s_k \in \overline{\mathbb{R}_+}$, la quantité $[s_0, \dots, s_k]$ est définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Soit $s_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors $[s_0] = s_0$ est défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$, donc $R(0)$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $R(k)$. Soit $s_0, \dots, s_{k+1} \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
D'après le point précédent, $s_k + \frac{1}{s_{k+1}}$ est défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$, donc d'après $R(k)$, $[s_0, \dots, s_{k+1}] = \left[s_0, \dots, s_{k-1}, s_k + \frac{1}{s_{k+1}}\right]$ est défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.
Le principe de récurrence permet de conclure.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ la propriété suivante : $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$.
Initialisation : On a $[x_0] = x_0 = x$, ce qui démontre que $R(0)$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie et démontrons $R(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}] &= \left[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right] \\
&= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \lfloor x_n \rfloor + \{x_n\}] \\
&= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] \\
&= x \quad \text{par hypothèse de récurrence,}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $R(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$.

Partie 2 : Fraction continue d'un rationnel.

3°) Les divisions euclidiennes effectuées correspondent à l'application de l'algorithme d'Euclide. Comme $u \wedge v = 1$, cet algorithme se termine par un reste égal à 1 suivi d'un reste nul. Ainsi, l'algorithme d'Euclide justifie l'existence de $d \in \mathbb{N}$ tel que $r_d = 1$ et $r_{d+1} = 0$.

4°) $\diamond$ Pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$, on note $S(k)$ la propriété $x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$.

Initialisation : On a $\frac{r_{0-1}}{r_0} = \frac{u}{v} = x = x_0$ donc $S(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $k \in \{0, \ldots, d-1\}$ tel que $S(k)$ est vraie et démontrons $S(k+1)$.

On a $\frac{r_{k-1}}{r_k} = \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} = q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}$, avec $0 \leqslant \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$, car dans la division euclidienne $r_{k-1} = q_k \times r_k + r_{k+1}$, on a $0 \leqslant r_{k+1} < r_k$.

De plus $q_k \in \mathbb{N}$, donc $\left\{\frac{r_{k-1}}{r_k}\right\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$.

Par hypothèse de récurrence, cela donne $\{x_k\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$ et donc $x_{k+1} = \frac{1}{\{x_k\}} = \frac{r_k}{r_{k+1}}$,

Donc $S(k+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$, $x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$.

$\diamond$ Pour tout $k \in \{0, \ldots, d\}$, on a

$$a_k = \lfloor x_k \rfloor = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = q_k$$

puisque $0 \leqslant \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$. Donc $\forall k \in \{0, \ldots, d\}, \quad a_k = q_k$.

$\diamond$ On constate alors que

$$\begin{aligned} x_{d+1} &= \frac{1}{\{x_d\}} = \frac{1}{\left\{\frac{r_{d-1}}{r_d}\right\}} = \frac{1}{\{r_{d-1}\}} \text{ (car } r_d = 1) \\ &= \frac{1}{0} \text{ (car } r_{d-1} \in \mathbb{N}^*) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer (à l'aide d'une récurrence immédiate) que pour tout $\forall k \geqslant d+1$, $x_k = a_k = +\infty$.

5°) D'après la question 2, $x = [a_0, a_1, \ldots, a_d, x_{d+1}]$, donc $x = [q_0, q_1, \ldots, q_d, +\infty] = x = [q_0, q_1, \ldots, q_{d-1}, q_d]$, ce qu'il fallait démontrer.

6°) On calcule $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$, donc $\frac{355}{113} = [3, 7, 16]$.

7°) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ a_n = +\infty\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc il admet un plus petit élément. Comme $a_0 \neq +\infty$, on sait que ce plus petit élément est supérieur ou égal à 1 . Cela nous permet de l'écrire $d+1$ où $d \in \mathbb{N}$.

On a donc $\forall k \in \{0,\dots,d\}$, $a_k \in \mathbb{N}$ et $a_{d+1} = +\infty$. Il s'ensuit que $x_{d+1} = +\infty$.
D'après la question 2, on a donc
$x = [a_0, a_1, \dots, a_d, x_{d+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_d, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_d]$.
On a donc montré que $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d]$ avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{N}$.
Dès lors, x s'écrit à l'aide d'un nombre fini de fractions d'entiers empilées, donc $x \in \mathbb{Q}_+$.

Partie 3 : Fraction continue d'un irrationnel.

8°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\{x_n\} = 0$. Alors $x_{n+1} = +\infty$, puis $a_{n+1} = +\infty$, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \in]0,1[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$ et donc $a_n \geqslant 1$. Cela implique que $\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geqslant q_n + q_{n-1}$. Comme $q_0 = 1$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, q_n \geqslant 1$. Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{n+1} > q_n$. Par conséquent, $(q_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.
$\diamond$ Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \geq n$.
En effet, on a vu que $q_1 \geq 1$, et si $q_n \geq n$ pour un certain $n \geq 1$, alors comme $q_{n+1} > q_n$, on a $q_{n+1} > n$, donc $q_{n+1} \geq n+1$.
On en déduit que $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

9°) $\diamond$ On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $[a_0, \dots, a_n, t]$ est défini et appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ la propriété suivante :
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, t] = \dfrac{p_n + \dfrac{p_{n-1}}{t}}{q_n + \dfrac{q_{n-1}}{t}}$.
Initialisation : Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On calcule :
$[a_0, t] = a_0 + \dfrac{1}{t}$ et $\dfrac{p_0 + \dfrac{p_{-1}}{t}}{q_0 + \dfrac{q_{-1}}{t}} = \dfrac{a_0 + \dfrac{1}{t}}{1 + \dfrac{0}{t}} = a_0 + \dfrac{1}{t}$, d'où $R(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] = \left[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} + \dfrac{1}{t}\right]$, donc d'après $R(n)$,

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] &= \frac{\left(a_{n+1} + \dfrac{1}{t}\right) p_n + p_{n-1}}{\left(a_{n+1} + \dfrac{1}{t}\right) q_n + q_{n-1}} \\
&= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1} + \dfrac{p_n}{t}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1} + \dfrac{q_n}{t}} \\
&= \frac{p_{n+1} + \dfrac{p_n}{t}}{q_{n+1} + \dfrac{q_n}{t}},
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $R(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.
◇ Dans la formule précédente, on fait tendre t vers $+\infty$. On obtient alors le résultat : $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$.

10°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$: $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$.
Initialisation : On a $p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = a_0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 = (-1)^{0+1}$ d'où $R(0)$.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie et démontrons $R(n+1)$. On calcule $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (a_{n+1}p_n + p_{n-1})\, q_n - (a_{n+1}q_n + q_{n-1})\, p_n = -\left(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}\right)$, donc d'après $R(n)$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^{n+2}$, ce qui démontre que $R(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$.
Cette égalité est une relation de Bézout. D'après le théorème de Bézout, on en déduit que p_n et q_n sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que la fraction $\dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

11°) ◇ Pour tout $n \geqslant 1$, on a
$\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} = \dfrac{p_{2n-1}q_{2n} - q_{2n-1}p_{2n}}{q_{2n-1}q_{2n}} = \dfrac{-(-1)^{2n+1}}{q_{2n-1}q_{2n}} = \dfrac{1}{q_{2n-1}q_{2n}}$ où la troisième égalité découle du résultat de la question précédente.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, on en déduit que $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
◇ Pour tout $n \geqslant 1$, on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n}{q_{n+2}q_n} \\
&= \frac{(a_{n+2}p_{n+1} + p_n)\, q_n - (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)\, p_n}{q_{n+2}q_n} \\
&= \frac{a_{n+2}\left(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n\right)}{q_{n+2}q_n} \\
&= \frac{a_{n+2}(-1)^n}{q_{n+2}q_n} \text{ d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} > 0$ et $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < 0$, ce qui démontre que $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et que $\left(\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

12°) ◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, t]$ est décroissante (car t est en dessous d'un nombre impair de traits de fraction). Il s'ensuit que
$[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] \geqslant [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty]$,
or d'après la question 2, $[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] = x$
et $[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty] = [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}] = \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$, donc $x \geqslant \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$.
De même, la fonction $t \longmapsto [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, t]$ est croissante (car t est en dessous d'un nombre pair de traits de fraction).
Il s'ensuit que $[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, x_{2n}] \leqslant [a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, +\infty]$,
c'est-à-dire que $x \leqslant \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} \leqslant x \leqslant \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$.

$\diamond$ La suite $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n\geq 1}$ est ainsi croissante et majorée, donc elle converge, vers une limite que l'on notera temporairement x^-. De même, la suite $\left(\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée, donc elle converge, vers une limite que l'on notera temporairement x^+.
En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient $x^- \leq x \leq x^+$.
De plus on a vu que $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par unicité de la limite, $x^- = x^+$. Ainsi, $x^- \leq x \leq x^-$, donc $x = x^- = x^+$.
Ainsi, les deux suites $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n\geq 1}$ converge vers x, donc $\dfrac{p_n}{q_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$: c'est un résultat classique, que l'on peut démontrer en passant aux ε :
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que,
pour tout $n \geq N_1$ (c'est-à-dire $2n \geq 2N_1$), $\left|\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} - x\right| \leq \varepsilon$ et,
pour tout $n \geq N_2$ (c'est-à-dire $2n-1 \geq 2N_2 - 1$), $\left|\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - x\right| \leq \varepsilon$.
On en déduit, en distinguant le cas où n est pair de celui où n est impair, qu'en posant $N = \max(2N_1, 2N_2 - 1)$, pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - x\right| \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 10, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$, donc en divisant par q_nq_{n+1}, $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}$. On en déduit, en notant d la distance dans $\mathbb{R}$, que $d\Big(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\Big) \leq \dfrac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \dfrac{1}{q_n^2}$, car d'après la question 8, la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
Or pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} \leqslant x \leqslant \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$, donc en distinguant les cas où n est pair ou impair, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d\Big(x, \dfrac{p_n}{q_n}\Big) \leq d\Big(\dfrac{p_n}{q_n}, \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\Big)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|x - \dfrac{p_n}{q_n}\right| \leq \dfrac{1}{q_n^2}$.

Problème 2 : ensembles pairs

1°) Par hypothèse, il existe une bijection f de E dans F. On suppose que E est pair. Il existe une partition par paires de E que l'on notera $\mathcal{E}$.
Notons $\mathcal{F} = \{f(P) \ / \ P \in \mathcal{E}\}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est une partition par paires de F.

— f étant injective, pour tout $P \in \mathcal{E}$, $|f(P)| = |P| = 2$, donc $f(P)$ est une paire de F.
— Soit $P', Q' \in \mathcal{F}$ tel que $P' \neq Q'$.
  Il existe $P, Q \in \mathcal{E}$ tels que $P' = f(P)$ et $Q' = f(Q)$.
  $P' \neq Q'$, donc $P \neq Q$.

Supposons que $P' \cap Q' \neq \emptyset$, c'est-à-dire que $f(P) \cap f(Q) \neq \emptyset$. Alors il existe $y \in f(P) \cap f(Q)$, donc il existe $p \in P$ et $q \in Q$ tels que $y = f(p) = f(q)$. f est injective, donc $p = q \in P \cap Q = \emptyset$.
C'est impossible donc $P' \cap Q' = f(P) \cap f(Q) = \emptyset$.

— D'après le cours, $\bigcup_{P \in \mathcal{E}} f(P) = f\Big(\bigcup_{P \in \mathcal{E}} P\Big) = f(E) = F$, car f est surjective.

Ceci démontre que $\mathcal{F}$ est une partition par paires de F, donc que F est pair.

2°) Posons $\mathcal{F} = \{\{2n, 2n+1\} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{2n, 2n+1\}$ est une paire de $\mathbb{N}$;

— Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n < m$. Alors $n \leq m-1$, donc $2n \leq 2m-2$. Ainsi, $2n < 2n+1 < 2m < 2m+1$, donc $\{2n, 2n+1\} \cap \{2m, 2m+1\} = \emptyset$.

— On sait que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n, 2n+1\}$, car tout entier est pair ou impair.

Ceci démontre que $\mathcal{F}$ est une partition par paires de $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ est pair.

3°) Posons $\mathcal{F} = \{\{A, \overline{A}\} \ / \ A \subset E\}$.

— Soit $A \subset E$. E étant non vide, il existe $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$, donc $A \neq \overline{A}$ et de même, si $x \notin A$, alors $x \in \overline{A}$, donc $A \neq \overline{A}$. Ceci montre que $\{A, \overline{A}\}$ est une paire de E ;

— Soit $P, Q \in \mathcal{F}$. Il existe $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $P = \{A, \overline{A}\}$ et $Q = \{B, \overline{B}\}$.
Supposons que $P \cap Q \neq \emptyset$. Alors $A \in Q$ ou $\overline{A} \in Q$, donc il y a 4 possibilités : $A = B$, $A = \overline{B}$, $\overline{A} = B$ ou $\overline{A} = \overline{B}$, qui se regroupent en seulement 2 possibilités : $A = B$ ou $A = \overline{B}$. Dans chaque cas, on a bien $P = \{A, \overline{A}\} = \{B, \overline{B}\} = Q$.
On a montré que $P \cap Q \neq \emptyset \Longrightarrow P = Q$,
donc par contraposée, $P \neq Q \Longrightarrow P \cap Q = \emptyset$.

— Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Posons $Q = \{A, \overline{A}\}$. Alors $A \in Q$ et $Q \in \mathcal{F}$, donc $A \in \bigcup_{P \in \mathcal{F}} P$.

L'inclusion réciproque étant évidente, on a montré que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{P \in \mathcal{F}} P$.

Ceci démontre que $\mathcal{F}$ est une partition par paires de $\mathcal{P}(E)$, donc $\mathcal{P}(E)$ est pair.

4°) Soit E un ensemble fini pair. Il existe une partition par paires $\{A_1, \ldots, A_m\}$ de E où $m \in \mathbb{N}$ (celle-ci contient nécessairement un nombre fini de paires sinon E serait infini). Dès lors, on a $|E| = \left|\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| = \sum_{i=1}^{m} 2 = 2m$ ce qui démontre que E est de cardinal pair.
Réciproquement, considérons un ensemble fini E de cardinal pair $2m$ où $m \in \mathbb{N}$. On peut énumérer ses eléments de sorte que $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1}, x_{2m}\}$. Alors l'ensemble $\{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2m-1}, x_{2m}\}\}$ est une partition par paires de E, ce qui démontre que E est pair.
Ainsi, un ensemble fini est pair si, et seulement si, son cardinal est pair.

5°) $\diamond$ Soit E un ensemble de cardinal $2m$, où $m \in \mathbb{N}^*$.
E est non vide, donc il possède au moins un élément que l'on note e.
Pour construire une partition par paires de E, on choisit un élément f dans $E \setminus \{e\}$ (il y a $2m-1$ choix) afin de constituer la paire $\{e, f\}$, puis on complète $\{\{e, f\}\}$ en choisissant une partition par paires de $E \setminus \{e, f\}$ (il y a a_{m-1} choix). On obtient donc $(2m-1)a_{m-1}$ partitions par paires de E.
Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $a_m = (2m-1)a_{m-1}$.
$\diamond$ De plus a_0 désigne le nombre de partitions par paires de $\emptyset$, or $\mathcal{P}_2(\emptyset) = \emptyset$, donc $\mathcal{F} = \emptyset$ est l'unique partition par paires de $E = \emptyset$. Ceci prouve que $a_0 = 1$.
Par récurrence, on en déduit alors que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a_m = \prod_{k=1}^{m}(2k-1)$ (en convenant que le produit vide est égal à 1).
En multipliant et en divisant par le produit des nombres pairs de 2 à $2m$, il vient, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a_m = \dfrac{(2m)!}{(2m)\times(2m-2)\times\cdots\times 4\times 2}$. Chaque facteur du dénominateur de factorise par 2 pour donner : $\forall m \in \mathbb{N}, \quad a_m = \dfrac{(2m)!}{m!2^m}$.

6°) Lorsque $\mathcal{E} \in \Pi(E)$, notons $\varphi(\mathcal{E}) = \{f(P) \ / \ P \in \mathcal{E}\}$. D'après la première question, φ est une application de $\Pi(E)$ dans $\Pi(F)$.
De même, pour tout $\mathcal{F} \in \Pi(F)$, notons $\Psi(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(Q) \ / \ Q \in \mathcal{F}\}$. Toujours d'après la première question, Ψ est une application de $\Pi(F)$ dans $\Pi(E)$.
On vérifie que $\varphi \circ \Psi = Id_{\Pi(F)}$ et $\Psi \circ \varphi = Id_{\Pi(E)}$, donc φ est une bijection de $\Pi(E)$ dans $\Pi(F)$, dont Ψ est la bijection réciproque.

7°) $\diamond$ Lorsque σ est une bijection de E dans E, il est clair que $\varphi(\sigma)$ est une partition par paires de E, donc φ est bien une application de $\mathcal{S}(E)$ dans $\Pi(E)$.
Soit $\mathcal{F} \in \Pi(E)$. On a vu en question 4 que $|\mathcal{F}| = m$. Notons $P_1, \ldots, P_m$ les éléments de $\mathcal{F}$, deux à deux distincts. Pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, notons $\sigma(2i-1)$ et $\sigma(2i)$ les deux éléments de P_i. Ainsi, $E = \{\sigma(1), \ldots, \sigma(2m)\}$, donc σ est une bijection de E dans E et $\mathcal{F} = \varphi(\sigma)$. Ceci démontre que φ est surjective.
$\diamond$ Reprenons les notations du point précédent. Pour construire $\sigma' \in \mathcal{S}(E)$ telle que $\varphi(\sigma') = \mathcal{F}$, on peut d'abord choisir une façon d'ordonner $P_1, \ldots, P_m$, sous la forme $P_{f(1)}, \ldots, P_{f(m)}$, où f est une bijection de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_m$, soit $m!$ choix, puis pour chaque $i \in \mathbb{N}_m$, on choisit pour $\sigma'(2i-1)$ l'un des deux éléments de $P_{f(i)}$, soit 2 choix, l'autre élément étant alors noté $\sigma'(2i)$. Ainsi, le nombre d'antécédents de $\mathcal{F}$ par φ est constamment égal à $m!2^m$. Alors, d'après le principe des bergers, $|\Pi(E)| = \dfrac{|\mathcal{S}(E)|}{m!2^m} = \dfrac{(2m)!}{m!2^m}$.
De plus, si F est un ensemble de cardinal $2m$, il est en bijection avec E, donc d'après la question précédente, le nombre de partitions par paires de F est égale à celui de E.
Ainsi, on a établi à nouveau que $a_m = \dfrac{(2m)!}{m!2^m}$.

8°) Posons $x_0 = x$. Comme $E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, il existe $x_1 \in E \setminus \{x_0\}$.
Comme $E \setminus \{x_0, x_1\} \neq \emptyset$, il existe $x_2 \in E \setminus \{x_0, x_1\}$, etc. On construit ainsi (par récurrence) une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, distints deux à deux.

Considérons l'application $\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \setminus \{x\} \\ & y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x_{k+1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$.

C'est une bijection puisqu'on voit que sa réciproque

est $\begin{array}{rccl} \varphi : & E \setminus \{x\} & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x_{k-1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$.

9°) L'ensemble $\big\{\{-x, x\} \ / \ x \in \mathbb{R}_+^*\big\}$ est une partition par paires de $\mathbb{R}^*$. Donc $\mathbb{R}^*$ est pair. Or, d'après la question précédente, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ sont équipotents. De plus, d'après la question 1, deux ensembles équipotents ont la même parité. Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ ont la même parité. En conclusion, $\mathbb{R}$ est pair.

10°) Posons $\mathcal{E} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \Gamma} \mathcal{F}$. Montrons que $\mathcal{E}$ est un majorant de Γ dans Π.

Si $\mathcal{F} \in \Gamma$, alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ par définition de $\mathcal{E}$. Ainsi $\mathcal{E}$ est un majorant de Γ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(E))$. Il reste à montrer que $\mathcal{E}$ appartient à Π.
Chaque $\mathcal{F}$ appartenant à Γ est constitué de paires d'éléments de E. Par conséquent, $\mathcal{E}$ est constitué de paires d'éléments de E.
Soient P_1 et P_2 deux paires distinctes d'éléments de E appartenant à $\mathcal{E}$. Il existe alors $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Gamma$ tels que $P_1 \in \mathcal{F}_1$ et $P_2 \in \mathcal{F}_2$. Comme Γ est totalement ordonnée, on a $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Pour fixer les idées, on suppose que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Dès lors, P_1 et P_2 appartiennent à $\mathcal{F}_2$. Et comme $\mathcal{F}_2$ est constitué de paires d'éléments de E qui sont disjointes, on en déduit que P_1 et P_2 sont disjointes. On a ainsi démontré que toutes les paires d'éléments de E qui appartiennent à $\mathcal{E}$ sont disjointes. On en déduit que $\mathcal{E}$ appartient bien à Π. En conclusion, $\mathcal{E}$ est un majorant de Γ dans Π.

11°) L'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué de paires d'éléments de E qui sont disjointes.
Notons $F = \bigcup_{P \in \mathcal{E}} P$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est une partition par paires de F. Il s'agit donc de montrer que $F = E$, ou bien qu'il existe un élément x de E tel que $F = E \setminus \{x\}$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $F \neq E$ et que, pour tout $x \in E$,
$F \neq E \setminus \{x\}$.
$F \neq E$, donc il existe $a \in E$ tel que $a \notin F$. Mais $F \neq E \setminus \{a\}$, donc il existe $b \in E \setminus \{a\}$ tel que $b \notin F$. Alors $F \subset E \setminus \{a, b\}$. Dans ce cas, $\mathcal{E} \sqcup \{\{a, b\}\}$ est aussi un élément de Π, strictement plus grand que $\mathcal{E}$, ce qui est impossible car $\mathcal{E}$ est maximal.

12°) D'après la question précédente, E est pair ou bien il existe $x \in E$ tel que $E \setminus \{x\}$ est pair, mais d'après la question 8, il existe une bijection entre E et $E \setminus \{x\}$, donc d'après la première question, lorsque $E \setminus \{x\}$ est pair, E est aussi pair.
En conclusion, on a montré que tout ensemble infini est pair.