Feuille d'exercices 10.
Groupes

Exercice 10.1 : (niveau 1)
Montrez que si A, B et C sont trois sous-groupes d'un groupe abélien noté $(G,+)$,

$$[A \subseteq C] \Rightarrow [A + (B \cap C) = (A + B) \cap C].$$

Exercice 10.2 : (niveau 1)
On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'ordre de σ, c'est-à-dire $\min\{k \in \mathbb{N}^*/\sigma^k = Id\}$ ainsi que l'ordre de σ'.
Déterminer les ordres de $\sigma\sigma'$ et de $\sigma'\sigma$.

Exercice 10.3 : (niveau 1)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \{s \in \mathcal{S}_n / \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \;\; s \circ \sigma = \sigma \circ s\}$.

1°) Déterminer Z_1 et Z_2.

2°) On suppose que $n \geq 3$.
a) Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, montrer qu'il existe une permutation σ_i dans $\mathcal{S}_n$ telle que $\sigma_i(i) = i$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$ avec $j \neq i$, $\sigma_i(j) \neq j$.
b) En déduire que $Z_n = \{Id_{\mathbb{N}_n}\}$.

Exercice 10.4 : (niveau 1)
Déterminer les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 10.5 : (niveau 1)
Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$.

Exercice 10.6 : (niveau 1)
Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions de la forme $(1\ k)$ où $k \in \{2,\ldots,n\}$.

Exercice 10.7 : (niveau 2)
Soit $(G,.)$ un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un groupe si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 10.8 : (niveau 2)
Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Exercice 10.9 : (niveau 2)

1°) Montrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

2°) En admettant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 10.10 : (niveau 2)
Soit $(G, .)$ un groupe. Si H est un sous-groupe de G, on dit que H est distingué dans G lorsque, pour tout $a \in G$ et pour tout $h \in H$, $aha^{-1} \in H$.

1°) Quels sont les sous-groupes distingués d'un groupe commutatif ?

2°) Montrer que, pour tout $a \in G$, l'application $\varphi_a \ : \ x \longmapsto axa^{-1}$ est un automorphisme de G.
Montrer qu'un sous-groupe H est distingué dans G si et seulement si, pour tout $a \in G$ $\varphi_a(H) = H$.

3°) Si $f \ : \ G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes, montrer que l'image directe (resp : réciproque) par f d'un sous-groupe distingué de G (resp : de G') est un sous-groupe distingué de $f(G)$ (resp : de G).

4°) Si $f \ : \ G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes, montrer que $Ker(f)$ est un sous-groupe distingué de G.

5°) Notons $Z(G) = \{a \in G / \forall h \in G \ ah = ha\}$ ($Z(G)$ s'appelle le centre de G). Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 10.11 : (niveau 2)
Quels sont les groupes qui ne possèdent qu'un nombre fini de sous-groupes ?

Exercice 10.12 : (niveau 2)
Soit $(G, .)$ un groupe commutatif fini. Si f et g sont deux morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$, calculer la quantité $\dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{x \in G} f(x).\overline{g(x)}$.

Exercice 10.13 : (niveau 2)
Soit $n \geq 3$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ dont la signature vaut 1.

1°) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles de longueur 3.

2°) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles $(1, 2, k)$ où $k \in \{3, \ldots, n\}$.

Exercice 10.14 : (niveau 2)
On fixe un entier n supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même.

1°) Montrer que pour toute transposition (a, b) de $\mathcal{S}_n$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $(a, b) = \sigma^{-1}(1, 2)\sigma$.

2°) Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$.

Exercice 10.15 : (niveau 3)
Montrer que si G est un groupe de type fini, c'est-à-dire engendré par un ensemble fini, alors G est dénombrable. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10.16 : (niveau 3)
p et q sont deux entiers non nuls premiers entre eux. On pose $n = pq$.
Soit G un groupe commutatif d'élément neutre e tel que, pour tout $x \in G$, $x^n = e$.
Notons $M = \{x \in G / x^p = e\}$ et $N = \{x \in G / x^q = e\}$.

1°) Montrer que M et N sont des sous-groupes de G.

2°) Montrer que $M \cap N = \{e\}$.

3°) Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f : & M \times N & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 10.17 : (niveau 3)
Soient $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G.

1°) Sur G, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par
$\forall (x, y) \in G^2 \ \ (x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H)$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Pour tout $x \in G$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x.
Montrer que, pour tout $x \in G$, $\overline{x} = xH$.
On note $G/H = \{\overline{x} / x \in G\} = \{xH / x \in G\}$.
On dira que H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si, pour tout $h \in H$ et $g \in G$, $ghg^{-1} \in H$.

2°) Montrer que, lorsque H est un sous-groupe distingué de G, en posant, pour tout $(x, y) \in G^2$, $\overline{x}.\overline{y} = \overline{x.y}$, $(G/H, .)$ est un groupe.

3°) Montrer que H est un sous-groupe distingué de G si et seulement si c'est le noyau d'un morphisme dont G est l'ensemble de départ.

4°) Si $f \ : \ G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes,
montrer que $\begin{array}{rcl} G/Ker(f) & \longrightarrow & Im(f) \\ \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 10.18 : (niveau 3)
Soit G un groupe fini non abélien.
On note $Z = \{g \in G / \forall h \in G,\ \ gh = hg\}$ (Z est le centre de G).
Montrer que $|Z| \leq \frac{|G|}{4}$.

Exercice 10.19 : (niveau 3)
Soit $(G, .)$ un groupe fini tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1_G$.
Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.

Exercice 10.20 : (niveau 3)
Soit $(G, .)$ un groupe fini commutatif.
Si $y \in G$, on note $o(y)$ l'ordre de y.

1°) Soit $x \in G$ tel que $o(x) = pq$, où $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer $o(x^p)$.

2°) Soit $(x, y) \in G^2$. On pose $o(x) = p$ et $o(y) = q$. On suppose que p et q sont premiers entre eux.
Déterminer $o(xy)$.

3°) Montrer qu'il existe un $x \in G$ tel que $o(x)$ est égal au plus petit commun multiple des ordres des éléments de G.

Exercice 10.21 : (niveau 3)
Lemme de Cauchy : Il s'agit de montrer que si G est un groupe dont l'ordre est multiple d'un nombre premier p, alors il existe dans G un élément d'ordre p.
On note E l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p) \in G^p$ tels que $x_1 \cdots x_p = 1_G$.
On définit sur E une relation binaire R en convenant que $(x_1, \ldots, x_p)\ R\ (y_1, \ldots, y_p)$ si et seulement si $(y_1, \ldots, y_p)$ se déduit de $(x_1, \ldots, x_p)$ par une permutation circulaire.

1°) Montrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Montrer que les classes d'équivalence sont de cardinal 1 ou p.

3°) Conclure.

Exercices supplémentaires :

Exercice 10.22 : (niveau 1)
Déterminer le nombre de p-cycles dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 10.23 : (niveau 1)
On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}/k \in \mathbb{Z}\}$ désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ est un groupe multiplicatif abélien.

Exercice 10.24 : (niveau 1)
Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
Préciser lesquels sont injectifs (resp : surjectifs).

Exercice 10.25 : (niveau 1)
Soit $(G, .)$ un groupe et A une partie de G.
On note $c(A) = \{x \in G/\forall a \in A, \ \ ax = xa\}$.

1°) Montrer que $c(A)$ est un sous-groupe de G.

2°) Si $A \subset B$, comparer $c(A)$ et $c(B)$.

3°) Montrer que $A \subset c(c(A))$.

Exercice 10.26 : (niveau 1)
Soient $(G, .)$ un groupe et I un ensemble non vide.
On considère une famille de sous-groupes de G, notée $(G_i)_{i\in I}$, telle que

$$\forall (i, j) \in I^2 \ \ \exists k \in I \ \ G_i \cup G_j \subset G_k.$$

Montrer que $\bigcup_{i\in I} G_i$ est un sous-groupe de G.

Exercice 10.27 : (niveau 1)
Soient $(G, .)$ un groupe et H et K deux sous-groupes de G.
On note $HK = \{hk/h \in H \text{ et } k \in K\}$ et $KH = \{kh/h \in H \text{ et } k \in K\}$.

1°) Si $KH = HK$, montrer que HK est un groupe.

2°) Démontrer la réciproque de la première question.

Exercice 10.28 : (niveau 1)
Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^2, +)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 10.29 : (niveau 2)
Dans $\mathbb{R}$, on considère la loi $\top$ de composition interne définie par
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x \top y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, où $\sqrt[3]{\ }$ désigne la bijection réciproque de l'application $x \longmapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Plus généralement, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à quelle condition existe-t-il une loi de groupe $\top$ sur $\mathbb{R}$ telle que f est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, \top)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$?

Exercice 10.30 : (niveau 2)
Si $x, y \in]-1, 1[$, on pose $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
Montrer que $(]-1, 1[, *)$ est un groupe abélien.

Exercice 10.31 : (niveau 2)
Soit $s \in \mathcal{S}_n$ une permutation qui commute avec le cycle $c = (1\ 2\ \cdots\ n)$.
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $s = c^k$.

Exercice 10.32 : (niveau 2)
Soit n un entier tel que $n \geq 2$.

1°) Montrez que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions $(i, i+1)$ où $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

2°) Montrez que $\mathcal{S}_n$ est engendré par la transposition $(1, 2)$ et le cycle $(1, \dots, n)$.

Exercice 10.33 : (niveau 2)
Soient G un groupe fini et f un morphisme de G tel que

$$Card\{x \in G / f(x) = x^{-1}\} > \frac{Card(G)}{2}.$$

Montrez que f est involutive (c'est-à-dire que $f \circ f = Id_G$).

Exercice 10.34 : (niveau 2)
Soient $(G_1, .)$ et $(G_2, .)$ deux groupes dont les éléments neutres sont respectivement notés e_1 et e_2.

1°) Montrer qu'on structure $G_1 \times G_2$ comme un groupe en posant
$\forall ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \in (G_1 \times G_2)^2\ \ (g_1, g_2).(h_1, h_2) = (g_1.h_1, g_2.h_2)$.
Pour la suite, on considèrera que $G_1 \times G_2$ est muni de cette loi.

2°) Soient φ_1 et φ_2 deux endomorphismes de G_1 et de G_2 respectivement.
Montrer que $\begin{array}{rccc} \Psi_{\varphi_1,\varphi_2} : & G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \end{array}$ est un endomorphisme.
Pour la suite, on note E l'ensemble des $\Psi_{\varphi_1,\varphi_2}$, lorsque φ_1 (respectivement : φ_2) décrit l'ensemble des endomorphismes de G_1 (respectivement : de G_2).

3°) Posons $G_1' = G_1 \times \{e_2\}$ et $G_2' = \{e_1\} \times G_2$.
Soit g un endomorphisme de $G_1 \times G_2$.
Montrer que $g \in E$ si et seulement si G_1' et G_2' sont stables par g.

Exercice 10.35 : (niveau 2)
Soit $(G, .)$ un groupe et A une partie de G, que l'on suppose stable, c'est-à-dire telle que, pour tout $a, b \in A$, $ab \in A$. Montrer que si A est finie et non vide, alors A est un sous-groupe de G.

Exercice 10.36 : (niveau 2)
Soit $(G,.)$ un groupe de cardinal $2n$ avec $n \geq 2$.
On suppose que G possède deux sous-groupes A et B d'ordre n tels que $A \cap B = \{1_G\}$.
Montrer que $n = 2$.

Exercice 10.37 : (niveau 2)
Soit n un entier impair. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1,\ldots,n\}$ dans lui-même.
Montrer que, pour tout $s \in \mathcal{S}_n$, $\prod_{i=1}^{n}(s(i)^2 - i^2)$ est un multiple de 4.

Exercice 10.38 : (niveau 2)
Soit $(G,.)$ un groupe fini et deux parties A et B de G telles que $|A| + |B| > |G|$.
Montrer que $G = AB$.

Exercice 10.39 : (niveau 3)
Inégalité de réarrangement :
Soient $a_0,\ldots,a_n$ $n+1$ réels rangés par ordre croissant et $b_0,\ldots,b_n$ $n+1$ réels également rangés par ordre croissant.
Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$.

Exercice 10.40 : (niveau 3)
Soit G un groupe, noté multiplicativement.
On note $D(G) = Gr\{xyx^{-1}y^{-1}/(x,y) \in G^2\}$. $D(G)$ est le groupe dérivé de G.

1°) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

2°) On suppose que H est un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est un groupe abélien si et seulement si $D(G) \subset H$.

Exercice 10.41 : (niveau 3)
Soit $(G,.)$ un groupe. On dit qu'un sous-groupe G' de G est distingué si et seulement si pour tout $g' \in G'$, pour tout $g \in G$, $gg'g^{-1} \in G'$.
H et K sont deux sous-groupes de $(G,.)$. On note $HK = \{hk/(h,k) \in H \times K\}$.

1°) Si H est un sous-groupe distingué de G, montrer que $HK = Gr(H \cup K)$.

2°) On suppose que H et K sont des sous-groupes distingués de G et que $H \cap K = \{1_G\}$. Montrer que, pour tout $(h,k) \in H \times K$, $hk = kh$, puis montrer que HK est isomorphe à $H \times K$.

3°) On suppose que H est un sous-groupe distingué de G.
a) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de K et que H est un sous-groupe distingué de HK.
b) On pose $G/H = \{\overline{g}/g \in G\}$ où $\overline{g} = gH = \{gh/h \in H\}$. Montrer que l'on peut munir G/H d'une structure de groupe pour laquelle $g \longmapsto \overline{g}$ est un morphisme de G dans G/H.
c) Montrer que $K/(H \cap K)$ est isomorphe à $(HK)/H$.

Exercice 10.42 : (niveau 3)
Soit $(G, .)$ un groupe fini non commutatif.
On tire au hasard, avec remise, deux éléments dans G.
Montrer que la probabilité qu'ils commutent est inférieure à $\frac{5}{8}$.

Exercice 10.43 : (niveau 3)
Automorphismes intérieurs de $\mathcal{S}_n$. Soit φ un automorphisme de $\mathcal{S}_n$ qui transforme toute transposition en une transposition.

1°) Montrer qu'on peut écrire $\varphi((1\ 2)) = (a_1\ a_2)$ et $\varphi((1\ 3)) = (a_1\ a_3)$.

2°) Montrer qu'on peut écrire $\varphi((1\ i)) = (a_1\ a_i)$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$,
où $a_i \in \{1, \ldots, n\}$.

3°) Montrer que $i \longmapsto a_i$ est un élément de $\mathcal{S}_n$.

4°) Montrer que les automorphismes intérieurs sont exactement les automorphismes qui transforment toute transposition en une transposition.

Exercice 10.44 : (niveau 3)
Si G est un groupe, on note $\text{sub}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G.
Soit G et H deux groupes finis de cardinaux premiers entre eux.
Montrer que $|\text{sub}(G \times H)| = |\text{sub}(G)| \times |\text{sub}(H)|$.

Exercice 10.45 : (niveau 3)
Lemme d'Artin : Soit $\mathbb{K}$ un corps et $(G, .)$ un groupe.
Soit $f_1, \ldots, f_p$ p morphismes de groupes de G dans $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, .)$, où $p \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $f_1, \ldots, f_p$ sont deux à deux distincts.
Montrer que, pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non tous nuls,
il existe $g \in G$ tel que $\alpha_1 f_1(g) + \cdots + \alpha_p f_p(g) \neq 0$.