MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 10 : du lundi 9 au vendredi 13 décembre.

Liste des questions de cours

1°) Démontrer l'inégalité triangulaire, pour $|z + z'|$, avec son cas d'égalité.

2°) CNS pour que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$: énoncé et démonstration.

3°) Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

4°) Pour $t \in \mathbb{R}$, développer e^t en série (entière).

5°) Si une série converge, montrer que son terme général tend vers 0.

6°) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

7°) Linéariser $\cos^3\theta$ en utilisant les complexes.

8°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

9°) Expliquer comment déterminer les racines n-ièmes du complexe $z = re^{i\varphi}$.

10°) Présenter la méthode de calcul des racines carrées d'un complexe lorsqu'il est donné sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

11°) Définir la similitude directe de centre $z_0 \in \mathbb{C}$, d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Préciser sa bijection réciproque, ses points fixes. Montrer qu'elle conserve les proportions et les angles.

12°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation $z \longmapsto az + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

13°) Montrer que l'ensemble des similitudes affines directes est un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$.

Les thèmes de la semaine :

Formules de Leibniz et de Taylor avec reste intégral

Ces formules sont établies dans le chapitre sur les complexes, ci-dessous, elles pourront donc faire l'objet d'exercices.

Les complexes

Pour construire l'exponentielle complexe, j'ai mis en place quelques notions portant sur les séries (cf 6.1), qui pourront faire l'objet d'une question de cours (cf ci-dessus), mais ces notions ne seront pas utilisées dans les exercices pour le moment.

1 Construction de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps.

Partie réelle, partie imaginaire, écriture algébrique d'un complexe.
Imaginaires purs.

2 Le plan complexe

Affixe d'un point M, image $M(z)$ d'un complexe z.
Affixe d'un vecteur, vecteur image d'un complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes.

$z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel.

3 La conjugaison

Propriété. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

4 Le module

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z|^2 = z\overline{z}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriété. $|z| = |\overline{z}|$, $|zz'| = |z| \times |z'|$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Inégalité triangulaire, corollaire de l'inégalité triangulaire.

Parties bornées.

5 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

5.1 Dérivation

Définition. On admet pour le moment que $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{C}$ est k fois dérivable si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont k fois dérivables et que $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

On admet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ des formules usuelles de dérivation : linéarité, produit, quotient, puissance entière, composition (pour $f \circ g$ avec $g\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Formule de Leibniz pour la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions.

5.2 Intégration

Si $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.
On admet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ des propriétés usuelles de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire, $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0, changement de variable et intégration par parties

Formule de Taylor avec reste intégral.

Application : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

6 L'exponentielle complexe

6.1 Quelques résultats sur les séries

Définition d'une suite convergente de complexes, d'une série convergente.

Si $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.

Si une série converge, son terme général tend vers 0, mais la réciproque est fausse.

L'absolue convergence implique la convergence (admis pour le moment).

Définition d'une série alternée, théorème spécial des séries alternées (TSSA), admis pour le moment.

6.2 Construction de l'exponentielle complexe

$\forall z \in \mathbb{C},\ \ e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$: c'est un prolongement de l'exponentielle réelle.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Définition de cos et sin par les formules d'Euler.
Développement en série entière de cos et sin.

Décroissance de cos entre 0 et 2, définition de $\frac{\pi}{2}$ comme unique racine de cos sur $[0, 2]$.

Etude des variations et de la périodicité de cos et sin

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

6.3 Arguments d'un complexe

Ecriture trigonométrique (ou exponentielle, ou polaire) : $z = \rho e^{i\theta}$.
Lorsque $\rho \geq 0$, on a $\rho = |z|$. On dit alors que θ est un argument de z noté $\arg(z)$, défini à 2π près.

Argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance entière.
Argument de l'opposé, $(\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \text{ modulo } 2\pi) \Longleftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Interprétation géométrique du produit dans $\mathbb{C}$.

$e^z = \rho e^{i\theta} \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi)$.

L'application exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective et $2i\pi$ périodique.

Formule de Moivre.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(e^{zt}) = ze^{zt}$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha \triangleq e^{\alpha \ln x}$, $\dfrac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha-1}$.

Technique de l'angle moyen.

Technique de linéarisation.

Polynômes de Tchebychev.

7 Équations polynomiales

7.1 Racines n-ièmes d'un complexe

$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\}$. C'est le groupe cyclique d'ordre n, engendré par $e^{2i\frac{\pi}{n}}$.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
Racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

7.2 Équations du second degré

7.2.1 Racines carrées

Méthode de calcul des racines carrées d'un complexe donné sous forme cartésienne $x + iy$.

7.2.2 Racines d'un trinôme

Discriminant, formule donnant les racines d'un trinôme, racine double.

$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ si et seulement si $\{z_1, z_2\}$ est l'ensemble des racines du trinôme $X^2 - sX + p$.

8 Complexes et géométrie

8.1 Distances et angles

Affixe d'un vecteur.
Traduction en termes de complexes de la distance entre 2 points et de l'angle entre deux vecteurs.

8.2 Orthogonalité et colinéarité

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes $u = a + ib$ et $v = c + id$.

— $\overrightarrow{u} \ // \ \overrightarrow{v} \iff \dfrac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(\overline{u}v) = 0 \iff ad - bc \triangleq \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \triangleq \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
 $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est le déterminant (aussi appelé le produit mixte) des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

— $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \dfrac{u}{v} \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(\overline{u}v) = 0 \iff ac + bd \triangleq < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = 0$.
 $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Corollaire. Conditions pour que trois points soient alignés, pour qu'ils forment un triangle rectangle.

8.3 Équation d'un cercle

Le cercle de centre $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ a pour équation
$|z - \alpha| = r \iff (z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2 \iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2$.
Réciproquement, un ensemble admettant une équation cartésienne de la forme
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$ est un cercle éventuellement réduit à un point ou à l'ensemble vide.

8.4 Les similitudes directes

Définition. Une isométrie est une application qui conserve les distances.

Translations, rotations de centre z_0 et d'angle θ, homothéties, similitude directe de centre $z_0 \in \mathbb{C}$, d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$: étude des points fixes, conservation des proportions et des angles.

Définition. On dit que f est une similitude affine directe si et seulement si c'est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \longmapsto az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Une similitude directe est ou bien une translation, ou bien une similitude définie par un centre, un angle et un rapport.

Propriété. L'ensemble S^+ des similitudes affines directes est un sous-groupe de $\mathcal{S}(\mathbb{C})$, dont l'ensemble des similitudes vectorielles directes est un sous-groupe.

Propriété. L'application qui à la similitude $z \longmapsto az + b$ associe a (resp : $|a|$) est un morphisme de groupes, dont le noyau est le sous-groupe des translations (resp : des rotations et des translations).

Corollaire. Une composée, quel que soit l'ordre, de translations, de rotations dont la somme des angles est égale à θ et d'homothéties dont le produit des rapports est égal à λ est une similitude directe de la forme $z \longmapsto \lambda e^{i\theta} z + b$.

Propriété. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ deux triangles non aplatis. On dit qu'ils sont directement semblables si et seulement si ils vérifient l'une des propriétés équivalentes suivantes.

1. Il existe $s \in S^+$ telle que $a' = s(a)$, $b' = s(b)$ et $c' = s(c)$;
2. $\dfrac{c - a}{b - a} = \dfrac{c' - a'}{b' - a'}$;
3. Le quotient des longueurs des côtés du triangle (a, b, c) issues de a est égal au quotient des longueurs des côtés du triangle (a', b', c') issues de a' et les angles $\widehat{bac}$ et $\widehat{b'a'c'}$ sont égaux ;
4. Les triangles (a, b, c) et (a', b', c') ont les mêmes angles.

Les similitudes indirectes ont seulement été évoquées mais n'ont pas fait l'objet d'une étude détaillée.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Groupes.